Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. На экскурсию в Санкт-Петербург едут 30 школьников вместе с родителями, часть из которых ведут автомобили. В каждый из автомобилей помещается 5 человек, включая водителя. Какое наименьшее количество родителей необходимо пригласить на экскурсию?

ОТВЕТ: 10

Решение: В автомобиль помещается не более 4 школьников, поэтому потребуется 8 автомобилей, т.е. 10 водителей.

2. В ряд стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 50. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

11 _ _ _ _ _ _ 12.

ОТВЕТ: 11,12,27,11,12,27,11,12

Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

3. Можете ли вы с помощью четырех арифметических действий (также можно использовать скобки) записать число 2016, используя последовательно цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

ОТВЕТ: $1\cdot 2\cdot 3\cdot (4+5)\cdot 6\cdot 7\cdot 8:9=2016$

4.

В тесте 4 раздела, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Андрей правильно ответил на 20 вопросов. При этом процент его верных ответов оказался больше 60, но меньше 70. Сколько вопросов было в тесте?

Ответ: 32.

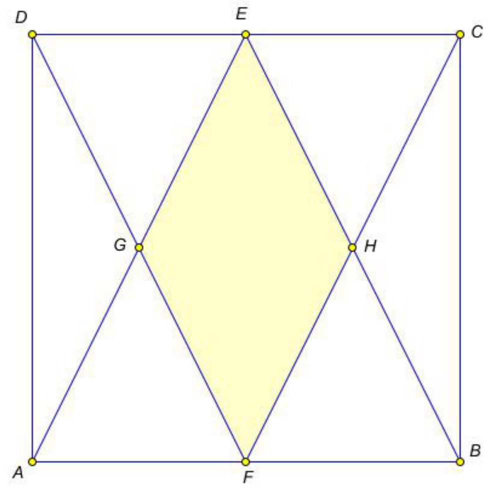
Решение. По условию $\frac{60}{100}<\frac{20}{x}<\frac{70}{100}$, отсюда $28\frac{4}{7}=\frac{200}{7}<x<\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$, то есть $29\le x\le 33$.

Из первого условия задачи следует, что число вопросов должно делиться на 4.

5. В квадрате *ABCD* точки *F* и *E* – середины сторон *AB* и *CD*, соответственно . Точку *E* соединили с вершинами *A* и *B*, а точку *F* – с *C* и *D*, как показано на рисунке. Определите площадь ромба *FGEH*, образовавшегося в центре, если известна сторона квадрата *AB*=4.

ОТВЕТ 4.

Решение – квадрат можно разрезать на кусочки и сложить еще 3 таких же ромба, т.е. ромб составляет ¼ от площади квадрата.



Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. На экскурсию в Нижний Новгород едут 50 школьников вместе с родителями, часть из которых ведут автомобили. В каждый из автомобилей помещается 6 человек, включая водителя. Какое наименьшее количество родителей необходимо пригласить на экскурсию?

ОТВЕТ: 10

Решение: В автомобиль помещается не более 5 школьников, поэтому потребуется 10 автомобилей, т.е. 10 водителей.

2. В ряд через запятую стоят 8 чисел так, что сумма каждых трех чисел, стоящих подряд, равняется 100. Известны первое и последнее число из этих восьми. Заполните шесть пустых мест:

20, _ ,_, _, _, _, _, 16.

ОТВЕТ: 20,16,64,20,16,64,20,16

Решение: Из условия вытекает, что последовательность чисел является периодической с периодом 3.

3. Расставьте знаки арифметических выражений и скобки в выражении, состоящем из трех чисел, $\frac{1}{8} \ldots \frac{1}{9} \ldots \frac{1}{28}$, так, чтобы результат вычислений был равен $\frac{1}{2016}$.

ОТВЕТ: $\frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{28}$ или $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \times \frac{1}{28}$

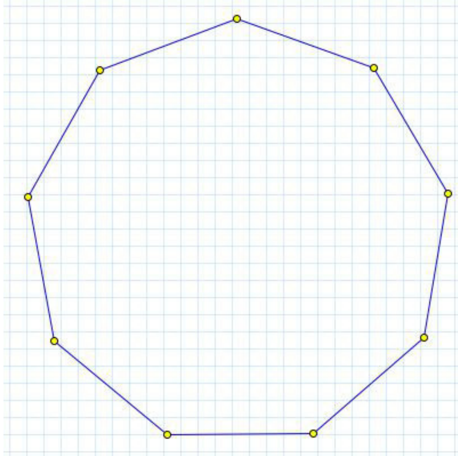
Решение: разложить 2016 на простые множители и заметить, что 2016=8x9x28.

4. В тесте 5 разделов, каждый из которых содержит одинаковое количество вопросов. Павел правильно ответил на 32 вопроса. При этом процент его верных ответов оказался больше 70, но меньше 77. Сколько вопросов было в тесте?

ОТВЕТ: 45.

Решение: из условия $0.7 < 32/x < 0.77$ вытекает, что $41<x<46$, но x кратно 5, поэтому x=45.

5. В вершинах правильного 9-угольника (см. рис.) расставьте числа 2016, 2017, …, 2024, таким образом, чтобы для любых трех вершин, образующих правильный треугольник одно из чисел было равно среднему арифметическому двух других.



ОТВЕТ: расставить числа подряд (возможны и другие варианты).

Решение: заметить, что любые три числа, идущие через равные промежутки, подходят.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. Тетя Зина продает в электричке носки – одну пару за 20 рублей или 3 пары за 50, причем с каждой такой покупки получает одинаковую прибыль. По какой цене ей надо продавать 5 пар, чтобы при этом получать такую же прибыль?
   ОТВЕТ: по 80 руб.
   Решения: Если оптовая цена носков x, то $20-x=50-3x$, откуда $x=15$.
2. Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?
   ОТВЕТ: -505.
   Решение: Решим уравнение $(x+2)^2=x^2-2016$.
3. Найдите все несократимые положительные дроби, которые увеличиваются в 3 раза, если увеличить и числитель и знаменатель на 12.
   ОТВЕТ: 2/9.
   Решение: Заметим, что если числитель не меньше 6, то от прибавления к нему 12, он вырастет не более, чем в три раза, поэтому сама дробь тем более не может увеличиться в 3 раза. Перебирая числители 1,2,3,4,5, получим дроби 1/3.6, 2/9, 3/18, 4/36, 5/90, из которых только 2/9 - несократимая.
4. Маленький огород размером 6х7 метров разбили на 5 квадратных грядок. Все межи между грядками проходят параллельно сторонам квадрата, сторона каждой грядки составляет целое число метров. Найдите суммарную длину получившихся мёж. Считать мёжи линиями, не имеющими толщины.
   ОТВЕТ: 15м.
   Решение: 42 можно разбить на 5 квадратов только одним способом: $42=4^2+3^2+3^2+2^2+2^2$. Их суммарный периметр равен 4*4+4*3+4*3+4*2+4*2 = 56. Но надо отнять внешние границы, их длина 6+6+7+7=26, а также учесть, что каждая межа участвует в периметре двух квадратов – поэтому надо поделить на 2.
5. Найдите наибольшее натуральное число, которое невозможно представить в виде суммы двух составных чисел.
   ОТВЕТ: 11
   Решение: Четные числа, большие 8 можно представить как сумму двух четных

чисел, больших 2. А нечетные числа, большие 12 можно представить как сумму 9 и четного составного числа. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что 11 так представить нельзя.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

Решения аналогичны решениям варианта v2a, поэтому приводятся только ответы.

1. Николай Иванович продает в электричке суперклей – один тюбик за 40 рублей или 3 тюбика за 100, причем с каждой такой покупки получает одинаковую прибыль. По какой цене ему надо продавать 10 тюбиков, чтобы при этом получать такую же прибыль?
   ОТВЕТ: 310. (решение – см. v2a).
2. Целое число уменьшили на 3, при этом его квадрат увеличился на 2015. Каким число было в начале (до уменьшения)?
   ОТВЕТ: Таких чисел (целых) не существует. (решение – см. v2a).
3. Найдите все несократимые положительные дроби, которые уменьшаются в 2 раза, если увеличить и числитель и знаменатель на 12.
   ОТВЕТ: 8/3. (решение – см. v2a).
4. Прямоугольник размером 7х6 дм. разрезали на 5 квадратов. Все разрезы проходят параллельно сторонам исходного прямоугольника, все квадраты имеют целые размеры в дм. Найдите суммарную длину сделанных разрезов.
   ОТВЕТ: 15. (решение – см. v2a).
5. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 3 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок. Сколько всего марок у Андрея, если известно, что недавно он купил для них дополнительный альбом, вмещающий 150 марок, так как такого же старого альбома уже не хватало?

ОТВЕТ: 208.

Решение. Если искомое число *x*, то число $x+2$ должно делиться на 3, 5 и 7, т. е. имеет вид $3\cdot 5\cdot 7\cdot p$. Значит, $x=105p-2$. Так как по условию $150<x\le 300$, то $p=2$. Поэтому $x=208$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. Миша, Петя, Коля и Вася играли в «подкидного дурака», всего сыграли 16 партий. Каждый остался «в дураках» хотя бы один раз. Известно, что больше всех оставался Миша, а Петя и Коля в сумме остались 9 раз. Сколько раз остался «в дураках» Вася?

   ОТВЕТ: 1.

   Решение: Петя или Коля остался не менее 5 раз, значит Миша оставался не менее 6 раз, следовательно Вася остался один раз (0 раз он не мог по условию).

2. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N+2 делится (без остатка) на 2, N+3 – на 3, …, N+10 – на 10.

   ОТВЕТ:2520.

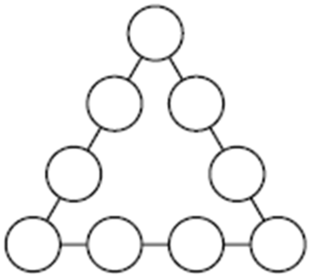
   Решение: Заметим, что N должно быть кратно 2,3,4, …, 10, следовательно, N= НОК (2,3,4,..,10)= 2^3x3^2x5x7= 2520.

3. Пятеро бегунов бежали эстафету. Если бы первый бежал в два раза быстрее, то они бы потратили на 5% меньше времени. Если бы второй бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы третий бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 12% меньше времени. Если бы четвертый бежал в два раза быстрее, то потратили бы на 15% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы пятый бежал в два раза быстрее?

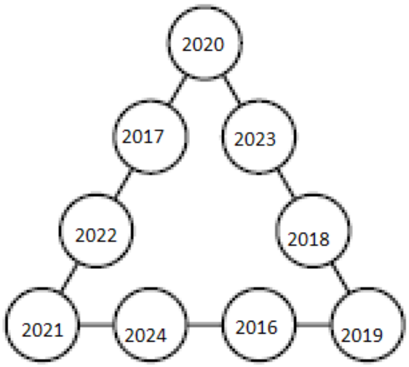
   ОТВЕТ: на 8%

   Решение: Если бы каждый бежал в два раза быстрее, то они пробежали бы быстрее на 50%. Значит, если бы 5-й бежал быстрее, то время уменьшилось бы на 50-5-10-12-15 = 8%.

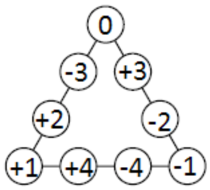
4. Можно ли расставить числа 2016, 2017, …, 2024 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



ОТВЕТ: Да, можно, см. рис.

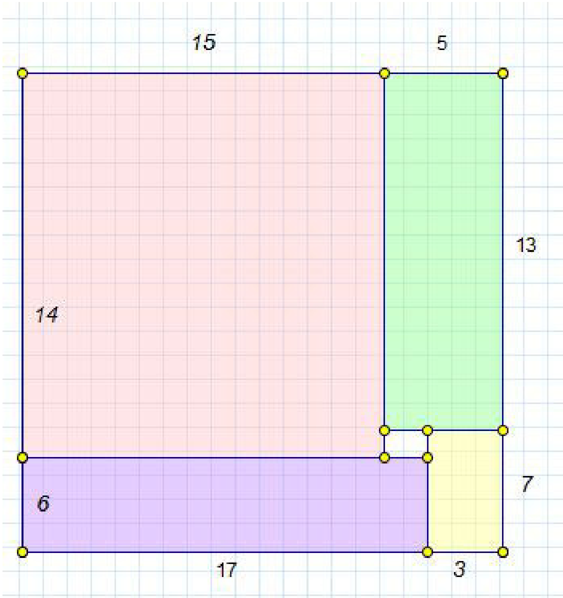


Решение: Сначала поставим во всех точках среднее значение 2020. Потом расставим 0,+/-1, +/-2, +/-3, +/-4, так, чтобы сумма на каждой стороне была равна 0 (см. рис). Возможны и другие варианты расстановки.



5. Дан квадрат 1х1. Разрежьте его на 5 прямоугольников, так, чтобы все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника были различными рациональными числами.

ОТВЕТ: Возьмем квадрат 20х20, разрежем на прямоугольники с целыми сторонами (см.рис.), потом уменьшим все стороны в 20раз. Возможны и другие варианты решения

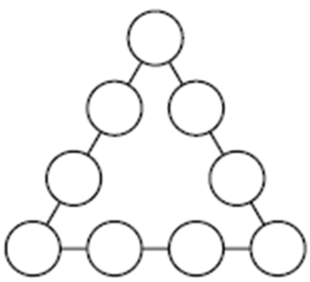


Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников
«Покори Воробьевы горы»
по математике

Задания заключительного этапа 2015/2016 учебного года для 5–6 класса

1. Маша, Катя, Оля и Лена сыграли в домино 22 партии. Известно, что каждая из девочек выиграла хотя бы один раз, причем Оля выиграла больше раз, чем каждая из оставшихся девочек, Катя и Оля в сумме выиграли 13 раз. Сколько раз выиграла Лена?
2. Найдите наименьшее натуральное N, такое, то N делится (без остатка) на 12, $N+2$ – на 14, $N+4$ – на 16, а $N+6$ – на 18.
3. Папа, мама, дедушка, бабушка и маленький Алёша сажали картофель. Если бы папа сажал картофель в два раза быстрее, то они бы потратили на 18% меньше времени на посадку. Если бы мама сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 12% меньше времени. Если бы дедушка сажал в два раза быстрее, то потратили бы на 10% меньше времени. Если бы бабушка сажала в два раза быстрее, то они потратили бы на 8% меньше времени. На сколько процентов меньше времени они бы потратили, если бы Алеша сажал картофель в два раза быстрее?
4. Можно ли расставить числа 2020, 2021, …, 2028 на указанные позиции (см. рис.), так, чтобы сумма чисел стоящих на каждой стороне треугольника была одинаковой?



5. Найдите 5 прямоугольников, из которых можно сложить квадрат размера 15x15, причем таких, что все 10 чисел, соответствующие ширине и высоте каждого прямоугольника являются различными целыми числами.

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

по математике

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР:

*От **85** баллов до **99** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (дипломант I степени):

*От **100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (дипломант II степени):

*От **90** баллов до **99** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике*