



МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»
по математике

2015/2016 учебный год

Отборочный этап олимпиады “Покори Воробьевы горы!” по математике состоял из блиц-тура (5 задач на 3 часа) и творческой части (7 задач).

Комплект блиц-задач

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Приводим набор типичных задач этого блиц-тура.

1. Решите неравенство

$$(2 + \sqrt{3})^x + 2 < 3(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^{2x}.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x , удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу $(-20; 53)$.

Ответ: Решение неравенства $(-\infty; 0)$. Искомая сумма $-19 - 18 - \dots - 2 - 1 = -190$. В ответ записываем -190 .

2. Решите уравнение

$$\cos^2 8x + \cos^2 x = 2 \cos^2 x \cdot \cos^2 8x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку $[3\pi; 6\pi]$, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

Ответ: Решение уравнения πn , $n \in \mathbb{Z}$. На отрезок $[3\pi; 6\pi]$ попадает четыре значения 3π , 4π , 5π , 6π . В ответ записываем $56, 55$, поскольку $12\pi \approx 56, 54866 \dots$

3. Площадь треугольника $\triangle ABC$ равна 10 см^2 . Какое наименьшее значение в сантиметрах может принимать длина окружности, описанной около треугольника $\triangle ABC$, если известно, что середины высот этого треугольника лежат на одной прямой? В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

Ответ: Наименьшее значение равно $2\pi\sqrt{10}$ см. В ответ записываем 20 , поскольку $2\pi\sqrt{10} \approx 19, 8691 \dots$

4. Определить число студентов, сдававших экзамен, если известно, что третья часть из них получила оценку "удовлетворительно", 44% получили оценку "хорошо", а пять человек получили оценку "отлично", причем эти отличники составляют более 3%, но менее 4% от искомого числа студентов. Если решений нет, либо решений несколько, то в графу ответа поставьте цифру 0.

Ответ: 150.

5. Найдите множество пар действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} 3^{-x}y^4 - 2y^2 + 3^x \leq 0, \\ 27^x + y^4 - 3^x - 1 = 0. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k^3 + y_k^3$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой. Если решений у исходной системы нет, то в графу ответа поставьте цифру 0.

Ответ: Решение системы $(x, y) = (0, \pm 1)$. Ответ -1 .

1 Творческие задачи (7 штук)

1-1. На соревнованиях по бегу нужно пробежать дистанцию в 3 одинаковых круга, при этом круг содержит целое число километров. Тренер заметил, что второй круг спортсмен пробежал за t минут. За сколько минут спортсмен пробежит всю дистанцию, если время прохождения им каждого километра, начиная со второго, увеличивается в арифметической прогрессии?

1. $t = 22$. Ответ 66.
 2. $t = 34$. Ответ 102.
 3. $t = 21$. Ответ 63.
 4. $t = 26$. Ответ 78.
 5. $t = 35$. Ответ 105.
 6. $t = 30$. Ответ 90.
 7. $t = 40$. Ответ 120.
 8. $t = 24$. Ответ 72.
 9. $t = 38$. Ответ 114.
 10. $t = 33$. Ответ 99.
-

1-2. На соревнованиях по бегу нужно пробежать дистанцию в N одинаковых кругов, при этом круг содержит целое число километров. Тренер заметил, что m -й круг спортсмен пробежал за t минут. За сколько минут спортсмен пробежит всю дистанцию, если время прохождения им каждого километра, начиная со второго, увеличивается в арифметической прогрессии?

11. $N = 5, m = 3, t = 23$. Ответ 115.
 12. $N = 5, m = 3, t = 22$. Ответ 110.
 13. $N = 5, m = 3, t = 26$. Ответ 130.
 14. $N = 5, m = 3, t = 27$. Ответ 135.
 15. $N = 5, m = 3, t = 28$. Ответ 140.
 16. $N = 5, m = 3, t = 29$. Ответ 145.
 17. $N = 5, m = 3, t = 30$. Ответ 150.
 18. $N = 5, m = 3, t = 31$. Ответ 155.
 19. $N = 5, m = 3, t = 32$. Ответ 160.
 20. $N = 5, m = 3, t = 33$. Ответ 165.
 21. $N = 7, m = 4, t = 25$. Ответ 175.
 22. $N = 7, m = 4, t = 26$. Ответ 182.
 23. $N = 7, m = 4, t = 27$. Ответ 189.
 24. $N = 7, m = 4, t = 28$. Ответ 196.
 25. $N = 7, m = 4, t = 29$. Ответ 203.
-

2. В подземелье у гномов в один ряд стоят N сундуков с сокровищами: некоторые из них закрыты, некоторые — открыты. Гном по имени Открывай проходит вдоль ряда и открывает каждый сундук, который до этого был закрыт. Затем гном по имени Закрывает подходит к каждому второму сундуку и, если он открыт, закрывает его. Потом гном Открывай подходит к каждому третьему сундуку и, если

от закрыт, открывает его. Затем гном Закрывавай подходит к каждому четвёртому сундуку и, если он открыт, закрывает его, и так далее. Всего вместе гномы Закрывавай и Открывай сделали N проходов вдоль ряда. Сколько сундуков окажутся после этого закрытыми?

1. $N = 2016$. Ответ 1008.
 2. $N = 2019$. Ответ 1009.
 3. $N = 2021$. Ответ 1010.
 4. $N = 2023$. Ответ 1011.
 5. $N = 2024$. Ответ 1012.
 6. $N = 2027$. Ответ 1013.
 7. $N = 2029$. Ответ 1014.
 8. $N = 2030$. Ответ 1015.
 9. $N = 2033$. Ответ 1016.
 10. $N = 2035$. Ответ 1017.
 11. $N = 2037$. Ответ 1018.
 12. $N = 2039$. Ответ 1019.
 13. $N = 2040$. Ответ 1020.
 14. $N = 2043$. Ответ 1021.
 15. $N = 2045$. Ответ 1022.
 16. $N = 2047$. Ответ 1023.
 17. $N = 2049$. Ответ 1024.
 18. $N = 2050$. Ответ 1025.
 19. $N = 2053$. Ответ 1026.
 20. $N = 2055$. Ответ 1027.
 21. $N = 2057$. Ответ 1028.
-

3-1. К равнобедренному треугольнику ABC с основанием AC достроили другой равнобедренный треугольник CBD с основанием CD так, что оба треугольника не имеют общих точек кроме точек стороны BC . Точка E — точка пересечения прямой AD с окружностью описанной вокруг треугольника ABC . Найдите отношение CD к радиусу описанной вокруг треугольника ABC окружности, если $\cos \angle DCE = \delta_1$ и $\cos \angle CBD = \delta_2$. В ответе укажите найденное отношение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

1. $\delta_1 = 6/7$, $\delta_2 = 9/10$. Ответ 0.77.
 2. $\delta_1 = 4/5$, $\delta_2 = 8/11$. Ответ 1.18.
 3. $\delta_1 = 7/8$, $\delta_2 = 9/11$. Ответ 1.06.
 4. $\delta_1 = 5/6$, $\delta_2 = 10/11$. Ответ 0.71.
 5. $\delta_1 = 7/9$, $\delta_2 = 11/12$. Ответ 0.64.
 6. $\delta_1 = 8/9$, $\delta_2 = 9/13$. Ответ 1.39.
 7. $\delta_1 = 6/7$, $\delta_2 = 10/13$. Ответ 1.16.
 8. $\delta_1 = 4/5$, $\delta_2 = 11/13$. Ответ 0.89.
 9. $\delta_1 = 7/8$, $\delta_2 = 12/13$. Ответ 0.69.
 10. $\delta_1 = 4/5$, $\delta_2 = 11/14$. Ответ 1.05.
 11. $\delta_1 = 7/9$, $\delta_2 = 13/14$. Ответ 0.59.
-

3-2. К равнобедренному треугольнику ABC с основанием AC достроили другой равнобедренный треугольник CBD с основанием CD так, что оба треугольника не имеют общих точек кроме точек стороны BC . Точка E — точка пересечения прямой AD с окружностью описанной вокруг треугольника ABC . Найдите отношение DE к радиусу описанной вокруг треугольника ABC окружности, если $\cos \angle CBD = \delta_2$. В ответе укажите найденное отношение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

1. $\delta_2 = 5/7$. Ответ 0.76.
2. $\delta_2 = 6/7$. Ответ 0.53.
3. $\delta_2 = 5/8$. Ответ 0.87.
4. $\delta_2 = 3/4$. Ответ 0.71.
5. $\delta_2 = 7/9$. Ответ 0.67.
6. $\delta_2 = 8/9$. Ответ 0.47.
7. $\delta_2 = 7/10$. Ответ 0.77.
8. $\delta_2 = 4/5$. Ответ 0.63.
9. $\delta_2 = 9/10$. Ответ 0.45.
10. $\delta_2 = 8/11$. Ответ 0.74.
11. $\delta_2 = 9/11$. Ответ 0.60.
12. $\delta_2 = 10/11$. Ответ 0.43.
13. $\delta_2 = 11/12$. Ответ 0.41.
14. $\delta_2 = 9/13$. Ответ 0.78.
15. $\delta_2 = 10/13$. Ответ 0.68.
16. $\delta_2 = 11/13$. Ответ 0.55.
17. $\delta_2 = 12/13$. Ответ 0.39.
18. $\delta_2 = 11/14$. Ответ 0.65.
19. $\delta_2 = 13/14$. Ответ 0.38.

3-3. К равнобедренному треугольнику ABC с основанием AC достроили другой равнобедренный треугольник CBD с основанием CD так, что оба треугольника не имеют общих точек кроме точек стороны BC . Точка E — точка пересечения прямой AD с окружностью описанной вокруг треугольника ABC . Найдите отношение CE к радиусу описанной вокруг треугольника ABC окружности, если $\cos \angle CBD = \delta_2$. В ответе укажите найденное отношение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

1. $\delta_2 = 5/7$. Ответ 0.76.
2. $\delta_2 = 6/7$. Ответ 0.53.
3. $\delta_2 = 5/8$. Ответ 0.87.
4. $\delta_2 = 3/4$. Ответ 0.71.
5. $\delta_2 = 7/9$. Ответ 0.67.
6. $\delta_2 = 8/9$. Ответ 0.47.
7. $\delta_2 = 7/10$. Ответ 0.77.
8. $\delta_2 = 4/5$. Ответ 0.63.
9. $\delta_2 = 9/10$. Ответ 0.45.
10. $\delta_2 = 8/11$. Ответ 0.74.
11. $\delta_2 = 9/11$. Ответ 0.60.
12. $\delta_2 = 10/11$. Ответ 0.43.
13. $\delta_2 = 11/12$. Ответ 0.41.
14. $\delta_2 = 9/13$. Ответ 0.78.
15. $\delta_2 = 10/13$. Ответ 0.68.
16. $\delta_2 = 11/13$. Ответ 0.55.
17. $\delta_2 = 12/13$. Ответ 0.39.
18. $\delta_2 = 11/14$. Ответ 0.65.
19. $\delta_2 = 13/14$. Ответ 0.38.

4. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{N}?$$

-
1. $N = 2057$. Ответ 12.

2. $N = 2016$. Ответ 13.
3. $N = 2366$. Ответ 14.
4. $N = 2940$. Ответ 15.
5. $N = 2925$. Ответ 16.
6. $N = 2816$. Ответ 17.
7. $N = 3179$. Ответ 18.
8. $N = 5508$. Ответ 19.
9. $N = 2527$. Ответ 20.
10. $N = 2205$. Ответ 22.
11. $N = 3388$. Ответ 23.
12. $N = 3703$. Ответ 24.
13. $N = 6336$. Ответ 25.
14. $N = 4375$. Ответ 26.
15. $N = 12844$. Ответ 27.
16. $N = 12393$. Ответ 28.
17. $N = 11760$. Ответ 29.
18. $N = 9251$. Ответ 30.
19. $N = 12493$. Ответ 32.
20. $N = 17408$. Ответ 33.

5-1. Решите уравнение

$$(1 - \cos x)(2 + \sin x + 4 \cos x) + 5(1 + \cos x)(2 - \sin x + 2 \cos x) = 0.$$

В ответе запишите сумму всех корней на промежутке A . Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

1. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1009$. Ответ 6342, 03.
2. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1010$. Ответ 6348, 32.
3. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1011$. Ответ 6354, 6.
4. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1012$. Ответ 6360, 88.
5. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1013$. Ответ 6367, 17.
6. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1014$. Ответ 6373, 45.
7. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1015$. Ответ 6379, 73.
8. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1016$. Ответ 6386, 02.
9. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1017$. Ответ 6392, 3.
10. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1018$. Ответ 6398, 58.

5-2. Решите уравнение

$$(1 - \cos x)(2 - \sin x + 4 \cos x) + 5(1 + \cos x)(2 + \sin x + 2 \cos x) = 0.$$

В ответе запишите сумму всех корней на промежутке A . Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

1. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1009$. Ответ 6337, 43.
2. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1010$. Ответ 6343, 72.
3. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1011$. Ответ 6350.
4. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1012$. Ответ 6356, 28.
5. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1013$. Ответ 6362, 57.
6. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1014$. Ответ 6368, 85.
7. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1015$. Ответ 6375, 13.
8. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1016$. Ответ 6381, 42.
9. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1017$. Ответ 6387, 7.

10. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1018$. Ответ 6393, 98.

5-3. Решите уравнение

$$(1 - \cos x)(3 + \sin x + 5 \cos x) + 7(1 + \cos x)(3 - \sin x + 3 \cos x) = 0.$$

В ответе запишите сумму всех корней на промежутке A . Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

1. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1009$. Ответ 6342, 15.
 2. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1010$. Ответ 6348, 44.
 3. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1011$. Ответ 6354, 72.
 4. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1012$. Ответ 6361,.
 5. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1013$. Ответ 6367, 29.
 6. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1014$. Ответ 6373, 57.
 7. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1015$. Ответ 6379, 85.
 8. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1016$. Ответ 6386, 14.
 9. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1017$. Ответ 6392, 42.
 10. $A = [2\pi m; 2\pi m + \pi]$, $m = 1018$. Ответ 6398, 7.
-

5-4. Решите уравнение

$$(1 - \cos x)(3 - \sin x + 5 \cos x) + 7(1 + \cos x)(3 + \sin x + 3 \cos x) = 0.$$

В ответе запишите сумму всех корней на промежутке A . Если корней нет или их на этом промежутке бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

1. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1009$. Ответ 6337, 32.
 2. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1010$. Ответ 6343, 6.
 3. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1011$. Ответ 6349, 88.
 4. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1012$. Ответ 6356, 16.
 5. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1013$. Ответ 6362, 45.
 6. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1014$. Ответ 6368, 73.
 7. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1015$. Ответ 6375, 01.
 8. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1016$. Ответ 6381, 3.
 9. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1017$. Ответ 6387, 58.
 10. $A = [2\pi m - \pi; 2\pi m]$, $m = 1018$. Ответ 6393, 86.
-

6. Четырёхугольная призма $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ с одинаковыми рёбрами, равными a , вписана в пирамиду $SABC$ так, что точка S_1 лежит на SA , точка P лежит на SB , точка R лежит на SC , точка Q_1 принадлежит плоскости ABC . Найдите ребро пирамиды SA , если известно, что $SB = b$, $SC = c$. При необходимости округлите найденное значение до двух знаков после запятой.

1. $a = 4$, $b = 13$, $c = 14$. Ответ 9, 84.
2. $a = 4$, $b = 15$, $c = 14$. Ответ 8, 94.
3. $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$. Ответ 9, 4.
4. $a = 4$, $b = 17$, $c = 14$. Ответ 8, 35.
5. $a = 5$, $b = 13$, $c = 14$. Ответ 19, 36.
6. $a = 5$, $b = 15$, $c = 14$. Ответ 16, 15.
7. $a = 5$, $b = 17$, $c = 14$. Ответ 14, 34.
8. $a = 5$, $b = 15$, $c = 17$. Ответ 13, 42.
9. $a = 5$, $b = 15$, $c = 18$. Ответ 12, 86.

10. $a = 5, b = 16, c = 19$. Ответ 11, 78.
11. $a = 5, b = 21, c = 16$. Ответ 11, 13.
12. $a = 5, b = 19, c = 17$. Ответ 11, 29.
13. $a = 6, b = 19, c = 14$. Ответ 23, 47.
14. $a = 6, b = 15, c = 14$. Ответ 35.
15. $a = 6, b = 13, c = 15$. Ответ 43, 33.
16. $a = 6, b = 17, c = 14$. Ответ 27, 46.
17. $a = 6, b = 13, c = 14$. Ответ 54, 6.
18. $a = 7, b = 15, c = 19$. Ответ 42, 45.
19. $a = 7, b = 17, c = 14$. Ответ 79, 33.
20. $a = 7, b = 15, c = 17$. Ответ 57, 58.
21. $a = 7, b = 15, c = 18$. Ответ 48, 46.
22. $a = 7, b = 16, c = 19$. Ответ 36, 07.
23. $a = 7, b = 21, c = 16$. Ответ 30, 55.
24. $a = 7, b = 19, c = 17$. Ответ 31, 85.
25. $a = 8, b = 23, c = 19$. Ответ 34, 61.
26. $a = 8, b = 17, c = 25$. Ответ 38, 2.
27. $a = 8, b = 23, c = 17$. Ответ 44, 06.
28. $a = 8, b = 23, c = 18$. Ответ 38, 51.
29. $a = 8, b = 21, c = 19$. Ответ 40, 41.
30. $a = 8, b = 21, c = 16$. Ответ 67, 2.
31. $a = 8, b = 19, c = 27$. Ответ 28, 3.

7. Назовём натуральное число m *замечательным*, если существует такое натуральное число k , не превосходящее N , что $f(m, k)$ — полный квадрат некоторого натурального числа. Здесь применяется стандартное обозначение: $[t]$ — наибольшее целое число, не превосходящее t . Если замечательных чисел конечное число, в ответ запишите их сумму; если замечательных чисел нет или их бесконечно много, в ответе запишите цифру 0.

1. $N = 2015, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos m])^2 + 2m \cdot [\cos m]$. Ответ 509 542.
2. $N = 2015, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos m])^2 - 2m \cdot [\cos m]$. Ответ 507 527.
3. $N = 2015, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(2m)])^2 + 2m \cdot [\cos(2m)]$. Ответ 508 533.
4. $N = 2015, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(2m)])^2 - 2m \cdot [\cos(2m)]$. Ответ 508 536.
5. $N = 2015, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(4m)])^2 + 2m \cdot [\cos(4m)]$. Ответ 509 542.
6. $N = 2015, f(m, k) = m^2 - k + ([\sin m])^2 - 2m \cdot [\sin m]$. Ответ 508 535.
7. $N = 2017, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos m])^2 + 2m \cdot [\cos m]$. Ответ 510 552.
8. $N = 2017, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(2m)])^2 + 2m \cdot [\cos(2m)]$. Ответ 510 552.
9. $N = 2017, f(m, k) = m^2 - k + ([\sin m])^2 + 2m \cdot [\sin m]$. Ответ 510 554.
10. $N = 2021, f(m, k) = m^2 - k + ([\sin m])^2 + 2m \cdot [\sin m]$. Ответ 511 565.
11. $N = 2021, f(m, k) = m^2 - k + ([\sin(4m)])^2 + 2m \cdot [\sin(4m)]$. Ответ 511 565.
12. $N = 2021, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(4m)])^2 + 2m \cdot [\cos(4m)]$. Ответ 512 575.
13. $N = 2021, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(5m)])^2 + 2m \cdot [\cos(5m)]$. Ответ 512 575.
14. $N = 2025, f(m, k) = m^2 - k + ([\sin m])^2 + 2m \cdot [\sin m]$. Ответ 513 590.
15. $N = 2025, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos m])^2 + 2m \cdot [\cos m]$. Ответ 514 602.
16. $N = 2025, f(m, k) = m^2 - k + ([\sin(4m)])^2 + 2m \cdot [\sin(4m)]$. Ответ 514 604.
17. $N = 2025, f(m, k) = m^2 - k + ([\cos(3m)])^2 + 2m \cdot [\cos(3m)]$. Ответ 513 590.