*Решения варианта **171** и ответы ко всем вариантам*

1. Функция $f(x) = \sin x + \cos x$ убывает на отрезке $[\pi/4; \pi/2]$ (монотонность можно обосновать равенством $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, либо при помощи производной, либо напрямую, используя определение). Значит, $\sin 1 + \cos 1 > \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Остаётся убедиться в справедливости оценки $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > \frac{49}{36}$. Действительно,

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{49}{36} \Longleftrightarrow 1+\sqrt{3} \vee \frac{49}{18} \Longleftrightarrow \sqrt{3} \vee \frac{31}{18} \Longleftrightarrow 3 > \frac{961}{324}.$$

Ответ: первое число больше.

Ответ к варианту ***172***: первое число больше.

Ответ к варианту ***173***: второе число больше.

Ответ к варианту ***174***: второе число больше.

2. Обозначим через n время в минутах за которое проходит круг более медленный мальчик. Тогда $n > 5$, $n \in \mathbb{N}$. Скорость с которой более быстрый мальчик догоняет медленного равна

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{n} = \frac{n-5}{5n}\left(\frac{\text{круг}}{\text{мин}}\right),$$

поэтому время между встречами составляет

$$\frac{5n}{n-5} = \frac{5(n-5)+25}{n-5} = 5 + \frac{25}{n-5}\,(\text{мин}),$$

а поскольку это целое число, то $(n-5)$ делит 25. Натуральные делители 25 — числа 1; 5 и 25. Тогда $n = 6$ или $n = 10$ или $n = 30$, что соответствует времени между встречами 30 минут, 10 минут и 6 минут. Поскольку время между встречами не менее 12 минут, заданному условию удовлетворяет только $n = 6$.

Ответ: 6 мин.

Ответ к варианту ***172***: 12 мин.

Ответ к варианту ***173***: 56 мин.

Ответ к варианту ***174***: 4 мин.

3. Поскольку выражение $\sqrt{(x+6)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-4)^2}$ равно сумме расстояний от точки $(x;y)$ до точек с координатами $(-6;0)$ и $(0;4)$, а геометрическое место решений уравнения $2|x| + 3|y| = 6$ на плоскости есть ромб

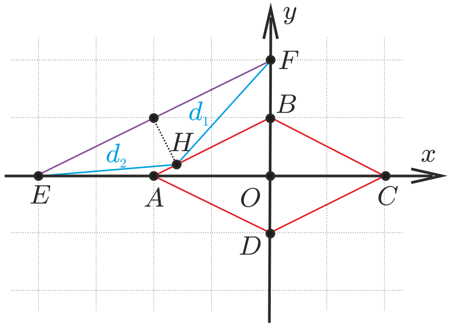


Рис. 1:

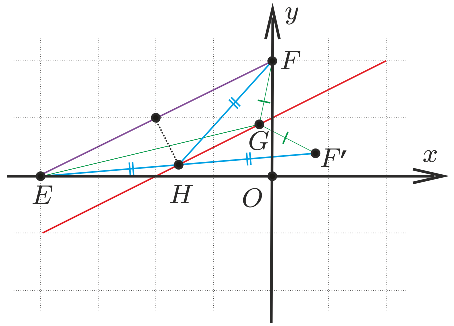


Рис. 2:

с вершинами $(3;0)$, $(0;-2)$, $(-3;0)$ и $(0;2)$, то задача равносильна поиску минимума суммы расстояний от точки, лежащей на указанном ромбе, до точек с координатами $(-6;0)$, $(0;4)$ (см. рис. 1).

Докажем, что минимум этой суммы достигается в точке, лежащей на стороне ромба и равноудалённой от точек $(-6;0)$ и $(0;4)$. Пусть точка G лежит на прямой l, параллельной EF и удалённой от прямой EF на расстояние h (см. рис. 2). Пусть также точка H на прямой l такова, что $EH = HF$, а точка F' симметрична точке F относительно прямой l. Тогда получаем

$$EG + FG \geqslant EH + HF' = EH + HF,$$

причём неравенство обращается в равенство лишь при совпадении точек G и H.

В нашем случае сторона ромба AB параллельна EF, а точка H прямой AB, для которой $EH = FH$, лежит на стороне ромба. Сумма расстояний от любой другой точки ромба до точек E и F превосходит $EH + FH$. Остаётся найти EF и расстояние между прямыми EF и AB. Применяя теорему Пифагора, получаем $EF = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$. Расстояние между прямыми равно расстоянию от начала координат до прямой AB (например, это следует из подобия прямоугольных треугольников), поэтому

$$h \cdot AB = AO \cdot BO \Longrightarrow h = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Таким образом, $EH + HF = 2\sqrt{\frac{36}{13} + 13} = 2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Ответ: $2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Замечание 1. Обоснование того, что минимум суммы реализуется в точке, лежащей на стороне ромба и равноудалённой от точек $(-6;0)$ и $(0;4)$, можно провести, используя выпуклость функции $f(x)=\sqrt{x}$, а именно, неравенство $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$.

Замечание 2. Расстояние между параллельными прямыми $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ и $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=2$ можно найти сразу по формуле $\varrho=\frac{|2-1|}{\sqrt{1/9+1/4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$, либо по формуле расстояния от точки до прямой.

Замечание 3. Точка H имеет координаты $(27/13;8/13)$.

Ответ к варианту ***172***: $\sqrt{\frac{241}{5}}$.

Ответ к варианту ***173***: $2\sqrt{\frac{117}{5}}$.

Ответ к варианту ***174***: $2\sqrt{\frac{29}{5}}$.

4. Уравнение имеет смысл при $[\log_3 x]>0\iff\log_3 x\geqslant 1\iff x\geqslant 3$.

Покажем, что при всех $x\geqslant 3$ справедливо неравенство $\log_3[x]\geqslant[\log_3 x]$ (на самом деле, это неравенство верно при всех $x\geqslant 1$, но нам это не требуется). Действительно, для любого $x\geqslant 3$ существует такое натуральное число k, что $x\in[3^k;3^{k+1})$, а тогда $[x]\in[3^k;3^{k+1})$, поэтому $\log_3[x]\geqslant k=[\log_3 x]$.

Следовательно,

$$f(x)=[\log_2(\log_3 x)]^2-11\log_2([\log_3 x])+18\log_2(\log_3([x]))\geqslant$$
$$\geqslant[\log_2(\log_3 x)]^2+7\log_2([\log_3 x])\geqslant 7\log_2([\log_3 x])\geqslant 0.$$

При $x\geqslant 9$ получаем $[\log_2(\log_3 x)]\geqslant 1>0$, поэтому на этом луче решений нет. На полуинтервале $[4;9)$ имеем $\log_2([\log_3 x])=0<\log_2(\log_3([x]))$, поэтому на этом промежутке решений также нет (первое неравенство в оценке $f(x)$ становится строгим). Наконец, любое число из полуинтервала $[3;4)$ является решением.

Ответ: $x\in[3;4)$.

Ответ к варианту ***172***: $x\in[2;3)$.

Ответ к варианту ***173***: $x\in[3;4)$.

Ответ к варианту ***174***: $x\in[2;3)$.

5. Опустим перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 из точки D на плоскости SBC, SAC и SAB соответственно. Обозначим $DD_1=x$, $DD_2=y$, $DD_3=z$. Согласно условию составим систему уравнений

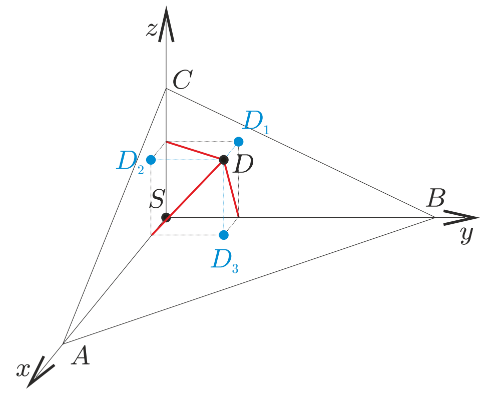


Рис. 3:

$$\begin{cases} y^2+z^2=5,\\ x^2+z^2=13,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$$

Отсюда находим $x=3$, $y=1$, $z=2$. Обозначим длины рёбер SA, SB и SC через a, b и c соответственно. Поскольку точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, выполняется соотношение $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх переменных получаем:

$$\frac{\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{3}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{c}}=\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\iff$$
$$\iff 1=\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)^3\geqslant\frac{6\cdot 27}{abc}\iff abc\geqslant 6\cdot 27.$$

причём равенство имеет место при $\frac{3}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{1}{3}$. Объём пирамиды $V=\frac{abc}{6}$, поэтому $V\geqslant 27$. Равенство имеет место при $a=9$, $b=3$, $c=6$.

Ответ: 27.

Ответ к варианту ***172***: 108.

Ответ к варианту ***173***: 27.

Ответ к варианту ***174***: 108.

Ответы и решения к варианту 3–1

1. Перебором, который можно сократить из соображений делимости, получаем.

Ответ: $x = 12, y = 12,\ x = 6, y = 30$.

Ответ к варианту: *3–2*: $x = 6, y = 12,\ x = 15, y = 6$.

2. Получаем систему $\begin{cases} b_1(1+q+\ldots+q^4) = 93, \\ b_1q^5(1+q+\ldots+q^4) = 2976, \end{cases}$

откуда $q = 2,\ b_1 = 3 \Rightarrow S_7 = \dfrac{3(128-1)}{2-1} = 381$.

Ответ: 381.

Решение второго варианта:

Получаем систему $\begin{cases} b_1(1+q+\ldots+q^4) = 242, \\ b_1q^5(1+q+\ldots+q^4) = 58806, \end{cases}$, откуда $q = 3,\ b_1 = 2$ $\Rightarrow S_6 = \dfrac{2(2187-1)}{3-1} = 2186$.

Ответ: 2186.

3. Введем обозначения: $S_{ABCD} = S$, $AD = k \cdot BC$ $(k > 1)$, $BC = a$, высота трапеции $ABCD$ — h, $x = \dfrac{MB}{AB}$. Тогда $S = \frac{a+ka}{2}h$, откуда $ah = \frac{2S}{1+k}$. Получаем: $S_{BKN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot hx = \frac{xS}{2(1+k)}$. Так как $MN = x(k-1)a + a$, то

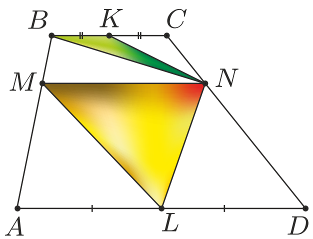


Рис. 1:

$S_{MNL} = \frac{a(x(k-1)+1)}{2} \cdot (1-x)h = \frac{S(x(k-1)+1)(1-x)}{1+k}$.

$$S_{BKN} + S_{MNL} = \frac{S}{2(1+k)}(2x^2(1-k) + x(2k-3) + 2).$$

Функция $f(x) = 2x^2(1-k) + x(2k-3) + 2$ имеет максимум при $x_0 = \frac{2k-3}{4(k-1)}$. Если $k = 10$, то $x_0 = \frac{17}{36}$, откуда $AM : MB = 19 : 17$.

Ответ: $19 : 17$.

Ответ к варианту: *3–2*: $17 : 15$.

4. Неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2\sin x\cos x} > \cos x - \sin x$.

1-ый случай $\begin{cases} \cos x - \sin x < 0 \\ \sin x\cos x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) > 0 \\ \sin 2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + 2\pi k < x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi + 2\pi k \leqslant x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{array} \right.$

2-ой случай $\begin{cases} \cos x - \sin x \geqslant 0 \\ 2\sin x\cos x > \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \leqslant 0 \\ \sin 2x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{12} + 2\pi k < x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x < \frac{17\pi}{12} + 2\pi k \end{array} \right.$

Ответ: $(\frac{\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k] \cup [\pi + 2\pi k; \frac{17\pi}{12} + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \pi + 2\pi k] \cup [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{12} + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$.

5. Пусть $t = 2x - 1$. Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{t}{t^2+4}$. Так как $t^2 + 4 \geqslant 2\sqrt{4t^2} = 4|t|$, то $-\frac{1}{4} \leqslant \frac{t}{t^2+4} \leqslant \frac{1}{4}$. Значения $\pm\frac{1}{4}$ достигаются при $t = \pm 2$. Следовательно, множество значений функций $g(t) = 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} = 16^{\frac{t}{t^2+4}}$ есть полуинтервал $[\frac{1}{2}; 2]$.

Ответ: $a \geqslant 2,\ b < \frac{1}{2}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $a > 3,\ b \leqslant \frac{1}{3}$.

Ответы и решения к варианту 4–1

1. Общее число учеников школы должно делиться на 7 и на 4, а значит, на 28. Так как по условию это число не более 40, то всего было 28 спортсменов. Призерами стали $(1/7 + 1/4 + 1/4) \cdot 28 = 18$ человек. Значит, остались без медалей 10.

Ответ: $x = 10$.

Ответ к варианту: *4–2*: $x = 18$.

2. *Первый способ*: Так как $x_1^3 - 2015x_1 + 2016 = 0$ и $x_2^3 - 2015x_2 + 2016 = 0$, то $x_1^3 - x_2^3 = 2015 \cdot (x_1 - x_2)$. Значит, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2015$.

Второй способ: По теореме Виета (но тогда нужно обосновать наличие трех разных корней): $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = -2016$. Поэтому

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = (-x_3)^2 + \frac{2016}{x_3} = \\ = \frac{x_3^3 + 2016}{x_3} = \frac{2015x_3}{x_3} = 2015.$$

Ответ: 2015.

Ответ к варианту: *4–2*: 2016.

3. Из равноудалённости сторон AB и AD от точки O вытекает их равенство. Следовательно равны углы $\angle ACD = \angle ADB = \angle ABD$. Таким образом

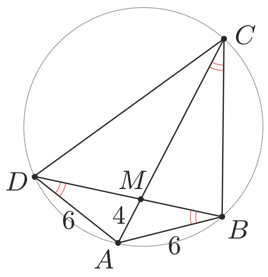


Рис. 2:

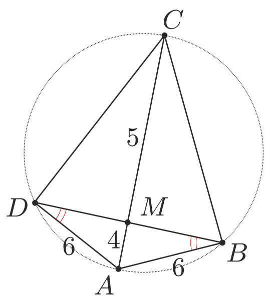


Рис. 3:

треугольники ABM и ACB подобны. Откуда $AB^2 = AM \cdot AC$, т.е. $AC = 9$, а следовательно $MC = 5$. Так как $DM \cdot MB = CM \cdot MA = 5 \cdot 4$, то $DM = 5x$, $MB = 4/x$. Следовательно

$$BD = 5x + \frac{4}{x} = 5\left(x + \frac{4}{5x}\right) \geqslant 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Остаётся заметить, что данный случай реализуется, когда AC проходит через центр окружности (см. рис. 3).

Ответ: $4\sqrt{5}$.

Ответ к варианту: *4–2*: $2\sqrt{5}$.

4. Правая часть неравенства равна нулю при $|x| \leqslant 10$ (при остальных x она не определена). Обозначив $\alpha = \frac{\pi x}{4}$, получим:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha} \geqslant 0 \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \geqslant 0, \\ \sin\alpha \neq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} \geqslant 0, \\ \operatorname{tg}\alpha \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому $x \in [-1 + 4k; 4k) \cup (4k; 4k + 1)$. На отрезке $[-10, 10]$ находятся целые числа -9, -5, -1, 3, 7, из которых на заданном в условии отрезке находятся числа -9, -5, -1, 3 сумма которых равна -12.

Ответ: -12.

Ответ к варианту: *4–2*: 12.

5. Первое уравнение приводится к виду $(x+y)^2 + (y-a)^2 = 0$, откуда получаем $x = -a$; $y = a$. Подстановка в неравенство дает:

$$2^{-2-a} \cdot \log_2(-a) < 1 \Longleftrightarrow \log_2(-a) < 2^{2+a}.$$

Равенство достигается при $a = -2$, и ввиду монотонности получаем $a \in (-2; 0)$.

Ответ: $x = -a$; $y = a$ при $a \in (-2; 0)$.
Ответ к варианту: *4–2*: $x = a$; $y = -a$ при $a \in (-3; 0)$.

*Ответы и решения к варианту **5–1***

1. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ \log_x \sqrt{2x}>0, \\ \log_2^2 x+\log_2 x-2=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение получено после возведения исходного в квадрат и простых преобразований.

Ответ: $x=\frac{1}{4}$.

Ответ к варианту: *5–2*: $x=\frac{1}{2}$.

2. Если черных кусочков x, то белых $32-x$. Так как каждый черный кусочек (пятиугольный) граничит только с белыми, то границ черных и белых кусочков будет $5x$. С другой стороны, таких границ $3\cdot(32-x)$. Из уравнения $5x=3\cdot(32-x)$ получаем $x=12$.

Ответ: 12.

Ответ к варианту: *5–2*: 20.

3. Исходное уравнение равносильно

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}\cos^4 2x \iff$$
$$\iff \frac{2+20\cos^2 2x+10\cos^4 2x}{32}=\frac{29}{16}\cos^4 2x,$$

Откуда $24\cos^4 2x-10\cos^2 2x-1=0$, $\cos^2 2x=\frac{1}{2}$, $\cos 4x=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$.

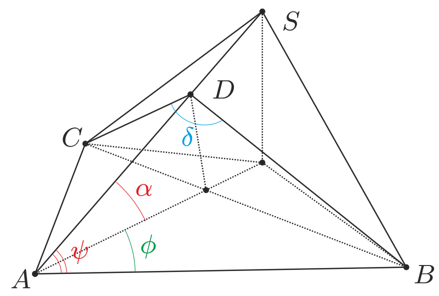
Ответ к варианту: *5–2*: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$.

4. *На плоскости основания конуса с высотой h и радиусом основания R дана точка (вне конуса), удалённая от окружности основания на расстояние aR. Найдите угол между касательными плоскостями к конусу, проходящими через данную точку.*

Первый способ:

Обозначим через L данную точку, через B и C — точки касания плоскостей с окружностью основания, $\varphi=\angle BAO$, $\psi=\angle SAB$, $\alpha=\angle SAO$. Точка K — точка пересечения хорды BC и прямой AO, где O — центр основания конуса. Тогда $\sin\varphi=\dfrac{BO}{OA}=\dfrac{1}{a+1}$, $BA=R\sqrt{a^2+2a}$, $BK=R\cos\varphi=\dfrac{R\sqrt{a^2+2a}}{a+1}$, $KA=BA\cos\varphi=\dfrac{R(a^2+2a)}{a+1}$.

Обозначим через S вершину конуса. Из прямоугольного $\triangle SOA$ находим $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{h}{(a+1)R}$. Следовательно $\sin\alpha=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}$. Пусть D — точка основания перпендикуляров, проведённых из точек B и C на прямую SA. Тогда $\delta=\angle BDC$ искомый. Из $\triangle DKA$ находим



$$KD=KA\sin\alpha=\frac{Rh(a^2+2a)}{(a+1)\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}.$$

$$\operatorname{tg}(\delta/2)=\operatorname{tg}\angle KDB=\frac{BK}{KD}=\frac{\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}{h\sqrt{a^2+2a}},$$

откуда $\delta=2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{h^2+(a+1)^2R^2}}{h\sqrt{a^2+2a}}$.

Второй способ: По теоореме косинусов для трёхгранного угла $SABC$ получаем[1]:

$$\cos\delta=\frac{\cos 2\varphi-\cos^2\psi}{\sin^2\psi},$$

где $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{a^2+2a}}{a+1}$, $\sin\psi=\dfrac{SB}{AS}=\dfrac{\sqrt{h^2+R^2}}{h^2+R^2(a+1)^2}$.

Поскольку $h=R$, $a=2$, то получаем ответ.

Ответ: $2\operatorname{arctg}(\sqrt{5}/2)$.

Ответ к варианту: *5–2*: $2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/\sqrt{3})$, (здесь $h=2R$, $a=1$).

5. Система чётна относительно x. Следовательно, для единственности решения необходимо $x=0$. Тогда $a=y+1$, $y=\pm 1$, откуда $a=0$ или $a=2$. Проверяется, что при $a=0$ решений бесконечно много, а при $a=2$ решение единственно.

Ответ: $a=2$.

Ответ к варианту: *5–2*: $a=-2$.

[1] Данное равенство можно доказать выразив BC^2 из двух треугольников BAC и BDC, используя планеметрическую теорему косинусов.

Решения

1. Пусть N — натуральное число из условия задачи. Из условия вытекает, что количество четвёрок числа N равно $2m$, а пятёрок $2m+17$. Использую свойство равноостаточности деления на 9: *остаток при делении на 9 натурального числа равен остатку при деления на 9 суммы его цифр.* Получаем

$$N \pmod 9) = 4\cdot 2m + 5(2m+17) \pmod 9) = 5\cdot 17 \pmod 9) = 4.$$

Ответ: 4. Ответ к варианту: *6–2*: 5.

2. Уравнение равносильно $x+\log_2 x-\log_3 x+\log_4 x = 7+\log_2 7-\log_3 7+\log_4 7$. Поскольку $f(x) = \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x = \log_2 x \cdot \left(1-\log_3 2+\frac{1}{2}\right) = \log_2 x\cdot \log_3\left(\frac{3^{3/2}}{2}\right)$ — монотонно возрастает, то функция $x+f(x)$ также монотонно возрастает на области определения. Следовательно решение $x=7$ является единственным решением данного уравнения.

Ответ: 7. Ответ к варианту: *6–2*: 5.

3. Отношение площади треугольника MBN к площади треугольника ABC равно $\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{32}$. Поэтому отношение площади четырёхугольника $AMNC$ к площади треугольника ABC равно $1-\frac{7}{32}=\frac{25}{32}$. Искомое отношение равно $\frac{7}{25}\cdot 100 = 28\%$.

Ответ: 28%.

Ответ к варианту: *6–2*: 108%.

4. *Решение.* О.Д.З. данного уравнения $x\in[-1;1]$. Выясним, когда каждый множитель равен нулю.

I. Решим уравнение

$$\sqrt2\sin 3x+\sqrt{2+\cos 3x}=0 \iff -\sqrt2\sin 3x=\sqrt{2+\cos 3x}\iff$$
$$\iff \begin{cases} 2\sin^2 3x = 2+\cos 3x,\\ \sin 3x\leqslant 0.\end{cases} \iff \begin{cases} 2\cos^2 3x+\cos 3x = 0,\\ \sin 3x\leqslant 0.\end{cases}\iff$$
$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 3x=-1/2,\end{array}\right.\\ \sin 3x\leqslant 0.\end{cases}$$

Уравнение $\cos 3x=0$ равносильно

$$3x=\pi/2+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\quad 3x=-\pi/2+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Но, первая серия не подходит из-за ограничения $\sin 3x\leqslant 0$. Таким образом из серии $x=-\pi/6+2\pi n/3$, $n\in\mathbb{Z}$ надо отобрать решения, подходящии под О.Д.З., т.е. $x\in[-1;1]$.

$$n\geqslant 1\Longrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\geqslant -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}>1\Longrightarrow\emptyset,$$
$$n=0\Longrightarrow -\frac{\pi}{6}\in[-1;1],$$
$$n\leqslant -1\Longrightarrow -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\leqslant -\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}<-1\Longrightarrow\emptyset.$$

Итак, уравнение $\cos 3x=0$ дало единственное решение $x=-\pi/6$. Аналогично разбирается уравнение $\cos 3x=-1/2$, решением которого, с учетом О.Д.З., будет $x=-2\pi/9$.

II. Решим второе уравнение $2\cos(\sqrt2\arcsin x)-1=0$. Откуда

$$\cos(\sqrt2\arcsin x)=1/2\iff \sqrt2\arcsin x=\pm\pi/3+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\iff$$
$$\iff \arcsin x=\pm\frac{\pi}{3\sqrt2}+\sqrt2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку множеством значений функции $\arcsin x$ является отрезок $[-\pi/2;\pi/2]$, то требуется проверить, чтобы правая часть последнего уравнения не выходила за данный отрезок.

$$n\geqslant 1\Longrightarrow \pm\frac{\pi}{3\sqrt2}+\sqrt2\pi n\geqslant \frac{5}{3\sqrt2}\,\pi>\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\emptyset,$$
$$n=0\Longrightarrow \pm\frac{\pi}{3\sqrt2}\in[-\pi/2;\pi/2],$$
$$n\leqslant -1\Longrightarrow \pm\frac{\pi}{3\sqrt2}+\sqrt2\pi n\leqslant -\frac{5}{3\sqrt2}\,\pi<-\frac{\pi}{2}\Longrightarrow\emptyset.$$

Таким образом второе уравнение равносильно $\arcsin x=\pm\frac{\pi}{3\sqrt2}$, т.е. $x=\pm\sin(\pi/(3\sqrt2))$.

Ответ: $-\pi/6$, $-2\pi/9$, $\pm\sin(\pi/(3\sqrt2))$.
Ответ к варианту: *6–2*: $-\pi/6$, $-2\pi/9$, $\sin(\pi/(3\sqrt3))$, $\sin(2\pi/(3\sqrt3))$. □

5. После замены $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$ второе уравнение выполнено, а первое запишется в виде $\cos^{15}3\alpha+\sin^{16}3\alpha=1$. Из цепочки

$$1=\cos^{15}3\alpha+\sin^{16}3\alpha\leqslant\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha=1$$

следует, что $\cos^{15}3\alpha=\cos^2 3\alpha$ и $\sin^{16}3\alpha=\sin^2 3\alpha$. Значит, либо $3\alpha=\pi/2+\pi k$, либо $3\alpha=2\pi k$, то есть $\alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$ или $\alpha=\frac{2\pi n}{3}$. Получается 9 пар решений (x,y):

$$\left(\frac{\sqrt3}{2};\pm\frac12\right);\ \left(-\frac{\sqrt3}{2};\pm\frac12\right);\ \left(-\frac12;\pm\frac{\sqrt3}{2}\right);\ (0;\pm1);(1;0).$$

Ответ: 9.

Ответ к варианту: *6–2*: 9.

*Ответы и решения к варианту **7–1***

1. $\dfrac{3(2x+y)}{y^2}-\dfrac{2(2x-y)}{y^2}-\dfrac{4x^2-y^2)}{y^2(2x-5y)}=\dfrac{2x+5y)}{y^2}-\dfrac{4x^2-y^2)}{y^2(2x-5y)}=-\dfrac{24}{2x-5y}$.
При $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}$ получаем $\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Решение второго варианта: $\frac{x-y}{(x+y)^2}+\frac{y-x}{(x-y)^2}=\frac{-4xy(x-y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{32}{189}$.

Ответ: $\frac{32}{189}$.

2. Область допустимых значений неравенства $(0;1/3)\cup(1/3;+\infty)$. Неравенство равносильно

$$\log_{3x}(x+1)<1\Longleftrightarrow(3x-1)(x+1-3x)<0\Longleftrightarrow(3x-1)(1-2x)<0.$$

Откуда, с учётом области допустимых значений исходного неравенства, получаем $x\in(0;1/3)\cup(1/2;+\infty)$.

Ответ: $x\in(0;1/3)\cup(1/2;+\infty)$.

Ответ к варианту: *7–2*: $x\in(-\infty;-1/2)\cup(-1/3;0)$.

3. Пусть N кв.м. надо покрасить, x — количество учеников, v — производительность каждого ученика, t_1 — время, за которое будет выполнена работа. Тогда выполнено, что $xvt_1=N$ и каждый ученик должен был покрасить $vt_1=\frac{N}{x}$ кв. м.

В условии задачи производительность мастера больше производительности каждого ученика в k раз ($k>1$). Поэтому в случае, когда один из учеников заболел, а его заменил мастер будет выполнено $((x-1)v+kv)t_2=N$, где t_2 — время, за которое будет выполнено работа. Тогда $vt_2=\frac{N}{x+k-1}$ кв. м.

Условие, что каждый оставшийся ученик, покрасил на a кв.м. меньше равносильно уравнению $\frac{N}{x}=\frac{N}{x+k-1}+a\Leftrightarrow(x+k-1)x=\frac{(k-1)N}{a}$. При $N=360$, $k=3$, $a=6$ получаем $(x+2)x=120\Rightarrow x=10$.

Ответ: 9.

Ответ к варианту: *7–2*: 11.

4. Центр сферы совпадает с центром O треугольника ABC. Если сфера пересекает ребро SB в точке P, то $OP=OB$ и перпендикуляр OQ к ребру SB является медианой треугольника POB. Обозначим сторону основания через a, через $\alpha=\operatorname{arctg}3$. Пусть M — основание перпендикуляра, проведенного из точки B на сторону AC. Находим $OM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO=\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Прямоугольные треугольники SOB и OQB подобны: $\frac{BQ}{BO}=\frac{BO}{SB}$. Получаем: $\frac{BQ}{SB}=\frac{BO^2}{SB^2}=\frac{4}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\frac{SP}{PB}=(1-2\frac{BQ}{SB}):2\frac{BQ}{SB}=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-4}{8}=\frac{5}{8}$.

Ответ: 5/8.
Ответ к варианту: *7–2*: 21/8.

5. Обозначим $\alpha=\pi x$.

$$\cos(8\alpha)+2\cos(4\alpha)-\cos(2\alpha)+2\sin(\alpha)+3=0\Longleftrightarrow$$
$$2\cos^2 4\alpha-1+2\cos 4\alpha-1+2\sin^2\alpha+2\sin\alpha+3=0\Longleftrightarrow$$
$$2\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Откуда

$$\begin{cases}\cos 4\alpha=-1/2,\\ \sin\alpha=-1/2\end{cases}\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\in\mathbb{Z},\\ \alpha=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Следовательно $x=-1/6+2m$, $x=-5/6+2n$, $m,n\in\mathbb{Z}$. Сумма первых двух положительных корней: $1\frac{1}{6}+1\frac{5}{6}=3$. Следующие два положительных корня больше на 4, т.е. равны 7 и т.д. Искомая сумма равна

$$3+7+11+\cdots+(3+4\cdot 49)=\frac{6+4\cdot 49}{2}\cdot 50=5050.$$

Ответ: 5050.
Ответ к варианту: *7–2*: 4950.

*Решения варианта **17-1** и ответы ко всем вариантам*

1. Функция $f(x) = \sin x + \cos x$ убывает на отрезке $[\pi/4; \pi/2]$ (монотонность можно обосновать равенством $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$, либо при помощи производной, либо напрямую, используя определение). Значит, $\sin 1 + \cos 1 > \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Остаётся убедиться в справедливости оценки $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > \frac{49}{36}$. Действительно,

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \vee \frac{49}{36} \iff 1+\sqrt{3} \vee \frac{49}{18} \iff \sqrt{3} \vee \frac{31}{18} \iff 3 > \frac{961}{324}.$$

Ответ: первое число больше.

Ответ к варианту ***17-2***: первое число больше.

Ответ к варианту ***17-3***: второе число больше.

Ответ к варианту ***17-4***: второе число больше.

2. Обозначим через n время в минутах за которое проходит круг более медленный мальчик. Тогда $n > 5$, $n \in \mathbb{N}$. Скорость с которой более быстрый мальчик догоняет медленного равна

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{n} = \frac{n-5}{5n}\left(\frac{\text{круг}}{\text{мин}}\right),$$

поэтому время между встречами составляет

$$\frac{5n}{n-5} = \frac{5(n-5)+25}{n-5} = 5 + \frac{25}{n-5}\,(\text{мин}),$$

а поскольку это целое число, то $(n-5)$ делит 25. Натуральные делители 25 — числа 1; 5 и 25. Тогда $n = 6$ или $n = 10$ или $n = 30$, что соответствует времени между встречами 30 минут, 10 минут и 6 минут. Поскольку время между встречами не менее 12 минут, заданному условию удовлетворяет только $n = 6$.

Ответ: 6 мин.

Ответ к варианту ***17-2***: 12 мин.

Ответ к варианту ***17-3***: 56 мин.

Ответ к варианту ***17-4***: 4 мин.

3. Поскольку выражение $\sqrt{(x+6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ равно сумме расстояний от точки $(x; y)$ до точек с координатами $(-6; 0)$ и $(0; 4)$, а геометрическое место решений уравнения $2|x| + 3|y| = 6$ на плоскости есть ромб

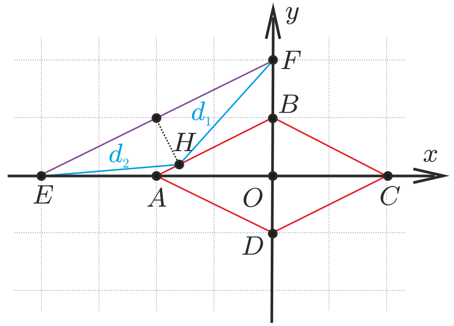


Рис. 4:

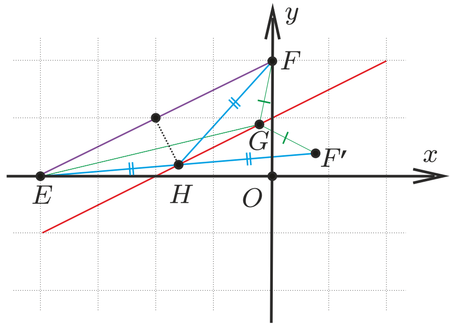


Рис. 5:

с вершинами $(3; 0)$, $(0; -2)$, $(-3; 0)$ и $(0; 2)$, то задача равносильна поиску минимума суммы расстояний от точки, лежащей на указанном ромбе, до точек с координатами $(-6; 0)$, $(0; 4)$ (см. рис. 1).

Докажем, что минимум этой суммы достигается в точке, лежащей на стороне ромба и равноудалённой от точек $(-6; 0)$ и $(0; 4)$. Пусть точка G лежит на прямой l, параллельной EF и удалённой от прямой EF на расстояние h (см. рис. 2). Пусть также точка H на прямой l такова, что $EH = HF$, а точка F' симметрична точке F относительно прямой l. Тогда получаем

$$EG + FG \geqslant EH + HF' = EH + HF,$$

причём неравенство обращается в равенство лишь при совпадении точек G и H.

В нашем случае сторона ромба AB параллельна EF, а точка H прямой AB, для которой $EH = FH$, лежит на стороне ромба. Сумма расстояний от любой другой точки ромба до точек E и F превосходит $EH + FH$. Остаётся найти EF и расстояние между прямыми EF и AB. Применяя теорему Пифагора, получаем $EF = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$. Расстояние между прямыми равно расстоянию от начала координат до прямой AB (например, это следует из подобия прямоугольных треугольников), поэтому

$$h \cdot AB = AO \cdot BO \Longrightarrow h = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Таким образом, $EH + HF = 2\sqrt{\frac{36}{13} + 13} = 2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Ответ: $2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Замечание 1. Расстояние между параллельными прямыми $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$ и $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=2$ можно найти сразу по формуле $\varrho=\frac{|2-1|}{\sqrt{1/9+1/4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$, либо по формуле расстояния от точки до прямой.

Замечание 2. Можно найти явный вид координат точки $H=(\frac{27}{13};\frac{8}{13}$.

Ответ к варианту ***17-2***: $\sqrt{\frac{241}{5}}$.

Ответ к варианту ***17-3***: $2\sqrt{\frac{117}{5}}$.

Ответ к варианту ***17-4***: $2\sqrt{\frac{29}{5}}$.

4. Уравнение имеет смысл при $[\log_3 x]>0 \iff \log_3 x \geqslant 1 \iff x\geqslant 3$.

Покажем, что при всех $x\geqslant 3$ справедливо неравенство $\log_3[x]\geqslant[\log_3 x]$ (на самом деле, это неравенство верно при всех $x\geqslant 1$, но нам это не требуется). Действительно, для любого $x\geqslant 3$ существует такое натуральное число k, что $x\in[3^k;3^{k+1})$, а тогда $[x]\in[3^k;3^{k+1})$, поэтому $\log_3[x]\geqslant k=[\log_3 x]$.

Следовательно,

$$f(x)=[\log_2(\log_3 x)]^2-11\log_2([\log_3 x])+18\log_2(\log_3([x]))\geqslant$$
$$\geqslant[\log_2(\log_3 x)]^2+7\log_2([\log_3 x])\geqslant 7\log_2([\log_3 x])\geqslant 0.$$

При $x\geqslant 9$ получаем $[\log_2(\log_3 x)]\geqslant 1>0$, поэтому на этом луче решений нет. На полуинтервале $[4;9)$ имеем $\log_2([\log_3 x])=0<\log_2(\log_3([x]))$, поэтому на этом промежутке решений также нет (первое неравенство в оценке $f(x)$ становится строгим). Наконец, любое число из полуинтервала $[3;4)$ является решением.

Ответ: $x\in[3;4)$.

Ответ к варианту ***17-2***: $x\in[2;3)$.

Ответ к варианту ***17-3***: $x\in[3;4)$.

Ответ к варианту ***17-4***: $x\in[2;3)$.

5. Опустим перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 из точки D на плоскости SBC, SAC и SAB соответственно. Обозначим $DD_1=x$, $DD_2=y$, $DD_3=z$. Согласно условию составим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2+z^2=5,\\ x^2+z^2=13,\\ x^2+y^2=10.\end{cases}$$

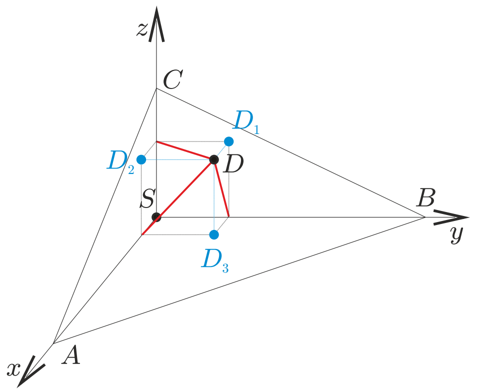


Рис. 6:

Отсюда находим $x=3$, $y=1$, $z=2$. Обозначим длины рёбер SA, SB и SC через a, b и c соответственно. Поскольку точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, выполняется соотношение $\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}=1$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для трёх переменных получаем:

$$\frac{\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{3}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{c}}=\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\iff$$
$$\iff 1=\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)^3\geqslant\frac{6\cdot 27}{abc}\iff abc\geqslant 6\cdot 27.$$

причём равенство имеет место при $\frac{3}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{c}=\frac{1}{3}$. Объём пирамиды $V=\frac{abc}{6}$, поэтому $V\geqslant 27$. Равенство имеет место при $a=9$, $b=3$, $c=6$.

Ответ: 27.

Ответ к варианту ***17-2***: 108.

Ответ к варианту ***17-3***: 27.

Ответ к варианту ***17-4***: 108.