ОЛИМПИАДА "ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ! 2014-2015

Предварительный этап

10-11 классы

1 Тестовая часть (5 задач)

1.1 Иррациональное неравенство

1-1. Решите неравенство

$$\frac{9-2\sqrt{1-x}}{10-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-2. Решите неравенство

$$\frac{9-2\sqrt{2-x}}{11-\sqrt{x^2-8x+16}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-3. Решите неравенство

$$\frac{x+7-3\sqrt{1-x}}{5-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-4. Решите неравенство

$$\frac{x+10-3\sqrt{-x-2}}{5-\sqrt{x^2+2x+1}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-5. Решите неравенство

$$\frac{x+3-4\sqrt{-x-1}}{3-\sqrt{x^2-2x+1}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-6. Решите неравенство

$$\frac{2x-1-4\sqrt{2-x}}{2-\sqrt{x^2-6x+9}} \geqslant 3.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-7. Решите неравенство

$$\frac{x+7-\sqrt{1-x}}{5-\sqrt{x^2-4x+4}} \geqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-8. Решите неравенство

$$\frac{4-\sqrt{-x-2}}{7-\sqrt{x^2-2x+1}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству.

1-9. Решите неравенство

$$\frac{2x+5-\sqrt{2-x}}{10-\sqrt{x^2-6x+9}} \geqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

1-10. Решите неравенство

$$\frac{9+\sqrt{-3-x}}{8-\sqrt{x^2+8x+16}} \leqslant 1.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

1-11. Решите неравенство

$$\frac{x-1+2\sqrt{3-x}}{2-\sqrt{x^2-8x+16}} \leqslant 2.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

1-12. Решите неравенство

$$\frac{2x+5+2\sqrt{-1-x}}{3-\sqrt{x^2-2x+1}} \leqslant 3.$$

В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и не превосходящих по абсолютной величине 15.

1.2 Тригонометрия

2-1. Решите уравнение
$$3\sin 2x + 2\cos 2x = 3.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-1. $A = [\pi/6; \pi]$.
2-2. $A = [\pi/4; \pi]$.
2-3. $A = [-5\pi/6; 0]$.
2-4. $A = [-5\pi/6; -\pi/2]$.
2-5. $A = [7\pi/6; 2\pi]$.
2-6. $A = [5\pi/4; 2\pi]$.
2-7. $A = [-7\pi/4; -\pi]$.
2-8. $A = [-11\pi/6; -3\pi/2]$.

2-1'. Решите уравнение
$$2\cos 2x - 3\sin 2x = 3.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-1. $A = [-\pi; -\pi/6]$.
2-2. $A = [-\pi; -\pi/4]$.
2-3. $A = [0; 5\pi/6]$.
2-4. $A = [\pi/2; 5\pi/6]$.
2-5. $A = [-2\pi; -7\pi/6]$.
2-6. $A = [-2\pi; -5\pi/4]$.
2-7. $A = [\pi; 7\pi/4]$.
2-8. $A = [3\pi/2; 11\pi/6]$.

2-2. Решите уравнение
$$\sin x \cdot \sin 3x + \sin 4x \cdot \sin 8x = 0.$$
В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-2-1. $A = [\frac{\pi(16m+1)}{}; \frac{(6m+1)\pi}{6}]$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
1. $m = 1$.
2. $m = 2$.
3. $m = 3$.
4. $m = 4$.
5. $m = 5$.
6. $m = 6$.
7. $m = 7$.
8. $m = 8$.

2-2-2. $A = [\frac{(3+10m)\pi}{}; \frac{(21+50m)\pi}{50}]$, $m = 1, 2, 3, 4$.
1. $m = 1$.
2. $m = 2$.
3. $m = 3$.

4. $m = 4$.

2-3. Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-3. $A = [\frac{m\pi}{}; \frac{(m+1)\pi}{}]$, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
1. $m = 1$.
2. $m = 2$.
3. $m = 3$.
4. $m = 4$.
5. $m = 5$.
6. $m = 6$.
7. $m = 7$.
8. $m = 8$.

2-4. Решите уравнение

$$\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-4. $A = [\frac{(1+12m)\pi}{}; \frac{(4m+1)\pi}{2}]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$.
2. $m = -2$.
3. $m = 3$.
4. $m = -3$.
5. $m = 4$.
6. $m = -4$.
7. $m = 5$.
8. $m = -5$.
9. $m = 6$.
10. $m = -6$.

2-5. Решите уравнение

$$5\sin x + 2\cos 2x = 3.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-5. $A = [2\pi m; \pi(2m+1)]$, $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
1. $m = 1$.
2. $m = -1$.
3. $m = 2$.
4. $m = -2$.
5. $m = 3$.
6. $m = -3$.
7. $m = 4$.
8. $m = -4$.

2-6. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+\pi/4)+\operatorname{tg}(x-\pi/4)=\operatorname{tg}x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-6. $A=[\frac{(1+3m)\pi}{3};\frac{(8m+9)\pi}{8}]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5.$
1. $m=2$. **Ответ:**
2. $m=-2$. **Ответ:**
3. $m=3$. **Ответ:**
4. $m=-3$. **Ответ:**
5. $m=4$. **Ответ:**
6. $m=-4$. **Ответ:**
7. $m=5$. **Ответ:**
8. $m=-5$. **Ответ:**

2-7. Решите уравнение

$$\cos x\cdot\cos 3x=\frac{1}{8}.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-7. $A=[\frac{(2m-1)\pi}{2};\frac{(2m+1)\pi}{2}]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5.$
1. $m=2$. **Ответ:**
2. $m=-2$. **Ответ:**
3. $m=3$. **Ответ:**
4. $m=-3$. **Ответ:**
5. $m=4$. **Ответ:**
6. $m=-4$. **Ответ:**
7. $m=5$. **Ответ:**
8. $m=-5$. **Ответ:**

2-8. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}2x=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-8. $A=[\frac{(4m+1)\pi}{2};(2m+1)\pi]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6.$
1. $m=2$. **Ответ:**
2. $m=-2$. **Ответ:**
3. $m=3$. **Ответ:**
4. $m=-3$. **Ответ:**
5. $m=4$. **Ответ:**
6. $m=-4$. **Ответ:**
7. $m=5$. **Ответ:**
8. $m=-5$. **Ответ:**
9. $m=6$. **Ответ:**
10. $m=-6$. **Ответ:**

2-9. Решите уравнение

$$\cos 3x+\sin x\sin 2x=0.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-9. $A=[\frac{(12m+1)\pi}{6};\frac{2(3m+1)\pi}{3}]$, $m=\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6$.
1. $m=2$. **Ответ:**
2. $m=-2$. **Ответ:**
3. $m=3$. **Ответ:**
4. $m=-3$. **Ответ:**
5. $m=4$. **Ответ:**
6. $m=-4$. **Ответ:**
7. $m=5$. **Ответ:**
8. $m=-5$. **Ответ:**
9. $m=6$. **Ответ:**
10. $m=-6$. **Ответ:**

2-10. Решите уравнение

$$\sin 9x = 2\sin 3x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих интервалу A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-10. $A=(2\pi m;\frac{(8m+1)\pi}{4})$, $m=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$.
1. $m=1$. **Ответ:**
2. $m=-1$. **Ответ:**
3. $m=2$. **Ответ:**
4. $m=-2$. **Ответ:**
5. $m=3$. **Ответ:**
6. $m=-3$. **Ответ:**
7. $m=4$. **Ответ:**
8. $m=-4$. **Ответ:**

2-11. Решите уравнение

$$4\sin 4x\cos 2x + 5\cos 3x = 5\cos 5x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-11. $A=[2\pi m;(2m+1)\pi]$, $m=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4$.
1. $m=1$. **Ответ:**
2. $m=-1$. **Ответ:**
3. $m=2$. **Ответ:**
4. $m=-2$. **Ответ:**
5. $m=3$. **Ответ:**
6. $m=-3$. **Ответ:**
7. $m=4$. **Ответ:**
8. $m=-4$. **Ответ:**

2-12. Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{5}{4} - 2\cos 2x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-12. $A = [2\pi m; (2m+1)\pi]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:**
2. $m = -2$. **Ответ:**
3. $m = 3$. **Ответ:**
4. $m = -3$. **Ответ:**
5. $m = 4$. **Ответ:**
6. $m = -4$. **Ответ:**
7. $m = 5$. **Ответ:**
8. $m = -5$. **Ответ:**
9. $m = 6$. **Ответ:**
10. $m = -6$. **Ответ:**

2-13. Решите уравнение

$$\cos 8x = \frac{14}{3}(\cos 2x - \sin 2x)^2 - 1.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-13. $A = [\pi(4m-1)/2; (4m+1)\pi/2]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
1. $m = 2$. **Ответ:**
2. $m = -2$. **Ответ:**
3. $m = 3$. **Ответ:**
4. $m = -3$. **Ответ:**
5. $m = 4$. **Ответ:**
6. $m = -4$. **Ответ:**
7. $m = 5$. **Ответ:**
8. $m = -5$. **Ответ:**
9. $m = 6$. **Ответ:**
10. $m = -6$. **Ответ:**

2-14. Решите уравнение

$$\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-14. $A = [2m\pi; (2m+1)\pi]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:**
2. $m = -2$. **Ответ:**
3. $m = 3$. **Ответ:**
4. $m = -3$. **Ответ:**
5. $m = 4$. **Ответ:**
6. $m = -4$. **Ответ:**
7. $m = 5$. **Ответ:**
8. $m = -5$. **Ответ:**
9. $m = 6$. **Ответ:**
10. $m = -6$. **Ответ:**

2-15. Решите уравнение

$$\sin 2x - \sin 4x = (1 + \cos 2x)\cos 3x.$$

В ответе укажите число, равное сумме корней уравнения, принадлежащих отрезку A, при необходимости округлив это число до двух знаков после запятой.

2-15. $A = [2\pi m; (4m+1)\pi/2]$, $m = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$.
1. $m = 2$. **Ответ:**
2. $m = -2$. **Ответ:**
3. $m = 3$. **Ответ:**
4. $m = -3$. **Ответ:**
5. $m = 4$. **Ответ:**
6. $m = -4$. **Ответ:**
7. $m = 5$. **Ответ:**
8. $m = -5$. **Ответ:**
9. $m = 6$. **Ответ:**
10. $m = -6$. **Ответ:**

1.3 Планиметрия

3-1. Внутри треугольника ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ выбрана точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$. Найдите сумму квадратов расстояний от точки M до вершин треугольника. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

---

1. $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$.
2. $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$.
3. $a = 7$, $b = 4$, $c = 6$.
4. $a = 8$, $b = 4$, $c = 6$.
5. $a = 9$, $b = 4$, $c = 6$.
6. $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$.
7. $a = 3$, $b = 7$, $c = 6$.
8. $a = 3$, $b = 8$, $c = 6$.
9. $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.
10. $a = 5$, $b = 6$, $c = 8$.
11. $a = 5$, $b = 6$, $c = 10$.
12. $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$.
13. $a = 5$, $b = 8$, $c = 10$.
14. $a = 5$, $b = 9$, $c = 10$.

3-2. Найдите сумму квадратов всех высот треугольника, если известны два его угла α и β и площадь S. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

---

1. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $S = 3$.
2. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $S = 6$.
3. $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $S = 9$.
4. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $S = 12$.
5. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$, $S = 12$.
6. $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $S = 8$.
7. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $S = 8$.
8. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $S = 10$.
9. $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $S = 12$.
10. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $S = 15$.
11. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$, $S = 15$.
12. $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $S = 15$.

3-3. Из точки M, лежащей внутри треугольника ABC, на стороны BC, AC, AB проведены перпендикуляры, длины которых равны k, l и m соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$. В случае, если ответ будет нецелым, округлите его до ближайшего целого.

---

1. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.
2. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.
3. $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.
4. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.
5. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.
6. $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $k = 3$, $l = 2$, $m = 4$.
7. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$.
8. $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/4$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$.
9. $\alpha = 2\pi/3$, $\beta = \pi/4$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$.
10. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$.
11. $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/6$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$.
12. $\alpha = \pi/4$, $\beta = 2\pi/3$, $k = 5$, $l = 3$, $m = 4$.

3-4. Из точки M, лежащей внутри треугольник ABC, проведены перпендикуляры MD, ME, MF на стороны BC, AC, AB соответственно. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника DEF, если известно, что $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, $MD = k$, $MF = m$. В случае, если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

---

1. $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$, $k = 2$, $m = 1$.
2. $a = 5$, $b = 4$, $c = 6$, $k = 1$, $m = 1$.
3. $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 1$, $m = 1$.
4. $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 3$, $m = 1$.
5. $a = 8$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 3$, $m = 1$.
6. $a = 8$, $b = 7$, $c = 6$, $k = 1/3$, $m = 1$.
7. $a = 8$, $b = 7$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$.
8. $a = 8$, $b = 10$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$.
9. $a = 8$, $b = 10$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$.
10. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 2$, $m = 1$.
11. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 1$.
12. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 1/2$.
13. $a = 8$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 1/3$.
14. $a = 10$, $b = 12$, $c = 9$, $k = 1$, $m = 2$.

1.4 Системы: симметричные, сводящиеся к однородным

4-1-1. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 = 2, \\ 3x^2 - xy + 5y^2 = 7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-1-2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - 2y^2 = 2, \\ 3x^2 - xy + 5y^2 = 7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-1-3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 1, \\ 12x^2 - 2xy + 5y^2 = 7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-1-4. Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 1, \\ 12x^2 - 2xy + 5y^2 = 7. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-2-1. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-2-2. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -1, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $|x_k + y_k|$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ: .

4-2-3. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -16, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-2-4. Решите систему

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = -16, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $|x_k + y_k|$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-3-1. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 11, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\dfrac{x_k}{y_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-3-2. Решите систему

$$\begin{cases} x^3 + 3y^3 = 88, \\ x^2y + xy^2 = 48. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $\dfrac{y_k}{x_k}$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-4-1. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = 17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k + y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-4-2. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = -17(x^3 y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-4-3. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = 17(x^3 y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 24. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k + y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них максимальное. В ответе укажите найденное максимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

4-4-4. Решите систему

$$\begin{cases} 3(x^4 + y^4) = -17(x^3 y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 24. \end{cases}$$

Вычислите значения выражения $x_k - y_k$ для каждого решения (x_k, y_k) системы и найдите среди них минимальное. В ответе укажите найденное минимальное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Ответ:

1.5 Проценты

5-1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит $p\%$ примесей, а второй – соответственно $q\%$ примесей. Определите, в какой пропорции следует соединить эти сплавы, чтобы получился новый сплав, в котором содержится $r\%$ примесей. В ответе укажите отношение массы первого сплава к массе второго в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

5-1-1. $p = 90$, $q = 20$, $r = 40$.

5-1-2. $p = 90$, $q = 30$, $r = 40$.

5-1-3. $p = 80$, $q = 10$, $r = 40$.

5-1-4. $p = 80$, $q = 10$, $r = 30$.

5-1-5. $p = 75$, $q = 20$, $r = 25$.

5-1-6. $p = 75$, $q = 10$, $r = 50$.

5-1-7. $p = 70$, $q = 5$, $r = 20$.

5-1-8. $p = 70$, $q = 5$, $r = 40$.

5-2. При сушке виноград теряет $p\%$ влаги, а абрикосы – $q\%$ влаги. Определите, в какой пропорции необходимо взять виноград и абрикосы, чтобы после сушки получилась смесь, содержащая одинаковое по весу количество изюма и урюка. В ответе укажите отношение массы винограда к массе абрикосов в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

5-2-1. $p = 20$, $q = 40$.

5-2-2. $p = 10$, $q = 30$.

5-2-3. $p = 40$, $q = 70$.

5-2-4. $p = 40$, $q = 10$.

5-2-5. $p = 50$, $q = 30$.

5-2-6. $p = 50$, $q = 25$.

5-3. В результате реструктуризации импорта на складе торговой сети овощей стало на $p\%$ больше, а фруктов – на $q\%$ меньше. Определите, сколько процентов фруктов стало на складе, если до реструктуризации их было $a\%$. Ответ запишите в виде десятичной дроби, округлив ее при необходимости до двух знаков после запятой.

5-3-1. $p = 20$, $q = 30$, $a = 30$.

5-3-2. $p = 40$, $q = 20$, $a = 20$.

5-3-3. $p = 35$, $q = 10$, $a = 20$.

5-3-3. $p = 20$, $q = 10$, $a = 40$.

5-3-4. $p = 20$, $q = 20$, $a = 40$.

5-3-5. $p = 30$, $q = 20$, $a = 60$.

5-3-6. $p = 35$, $q = 10$, $a = 60$.

Заочный тур «Покори Воробьевы Горы!» (ноябрь 2014 г.)

Задача 1. Определите, сколькими нулями оканчивается число $N!$.

Решение. Пусть $N = 2014$. Из 2014 первых натуральных чисел на 5 делится 402 числа, из них на 25 делятся 80 чисел. Из этих 80ти чисел на 125 делятся 16 чисел, из которых на 625 делятся 3 числа. Четных чисел среди первых 2014 натуральных чисел больше, чем делящихся на 5. Таким образом, количество нулей в конце числа 2014! определяется количеством «пятерок»-делителей в этом числе. Итого: $402 + 80 + 16 + 3 = 501$ нуль.

Ответ:

□

1. $N = 2013!$. Ответ
2. $N = 2014!$. Ответ
3. $N = 2015!$. Ответ
4. $N = 2016!$. Ответ
5. $N = 2020!$. Ответ
6. $N = 2024!$. Ответ
7. $N = 2025!$. Ответ
8. $N = 2027!$. Ответ

Задача 2. 2-1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-100)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

2-2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-102)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

2-3. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-3)^2 + \ldots + (x-101)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

2-4. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = x^2 + (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-104)^2.$$

В случае, если получится нецелое число, в ответ запишите результат его округления до ближайшего целого.

Задача 3. Определите, сколько корней уравнения

$$4\sin 2x + 3\cos 2x - 2\sin x - 4\cos x + 1 = 0$$

расположено на отрезке $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2015}\pi]$. В ответ запишите сумму всех цифр найденного числа.

---

1. Уравнение $4\sin 2x+3\cos 2x-2\sin x-4\cos x+1=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2015}\pi]$. Ответ
2. Уравнение $2\sin 2x+\cos 2x+\cos^2 x-\sin x-2\cos x=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2014}\pi]$. Ответ .
3. Уравнение $2\sin 2x+\cos 2x-\sin^2 x-\sin x-2\cos x+1=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2016}\pi]$. Ответ

4. Уравнение $4\sin 2x+\cos 2x+4\cos^2 x-2\sin x-4\cos x-1=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2017}\pi]$. Ответ

5. Уравнение $24\sin 2x+7\cos 2x-36\sin x-48\cos x+35=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2018}\pi]$. Ответ

6. Уравнение $12\sin 2x+3\cos 2x+\cos^2 x-18\sin x-24\cos x+17=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2019}\pi]$.

7. Уравнение $12\sin 2x+3\cos 2x-\sin^2 x-18\sin x-24\cos x+18=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2020}\pi]$.

8. Уравнение $24\sin 2x+5\cos 2x+4\cos^2 x-36\sin x-48\cos x+33=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2021}\pi]$.

9. Уравнение $8\cos 2x+15\sin 2x-15\sin x-25\cos x+23=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2022}\pi]$.

10. Уравнение $8\cos 2x+15\sin 2x-15\sin x-25\cos x+23=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2023}\pi]$.

11. Уравнение $7\cos 2x+15\sin 2x+2\cos^2 x-15\sin x-25\cos x+22=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2024}\pi]$.

12. Уравнение $6\cos 2x+15\sin 2x+4\cos^2 x-15\sin x-25\cos x+21=0$ отрезок $[10^{2014!}\pi; 10^{2014!+2025}\pi]$.

Задача 4. Найдите наименьшее натуральное m, для которого существует такое натуральное n, что наборы последних 2014 цифр в десятичной записи чисел $a = 2015^{3m+1}$ и $b = 2015^{6n+2}$ одинаковы, причем $a < b$.

---

1. $a = 2015^{3m+1}$, $b = 2015^{6n+2}$.
2. $a = 2015^{3m+4}$, $b = 2015^{6n-4}$.
3. $a = 2015^{3m+7}$, $b = 2015^{6n+2}$.
4. $a = 2015^{3m-2}$, $b = 2015^{6n-4}$.
5. $a = 2015^{5m-1}$, $b = 2015^{10n-2}$.
6. $a = 2015^{5m+4}$, $b = 2015^{10n+8}$.
7. $a = 2015^{5m+9}$, $b = 2015^{10n-2}$.
8. $a = 2015^{5m+19}$, $b = 2015^{10n+8}$.

Задача 5. Из вершины B треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке E. Найдите высоту BF треугольника ABC, если известно, что центр описанной вокруг треугольника ABC окружности лежит на луче BE, $AF \cdot FE = 5$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 3:4$. В ответе укажите найденную высоту, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

---

1. $AF \cdot FE = 5$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 3:4$.
2. $AF \cdot FE = 6$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 3:4$.
3. $AF \cdot FE = 7$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 4:5$.
4. $AF \cdot FE = 8$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 4:5$.
5. $AF \cdot FE = 9$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 5:6$.
6. $AF \cdot FE = 10$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 5:6$.
7. $AF \cdot FE = 11$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 6:7$.
8. $AF \cdot FE = 12$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 6:7$.
9. $AF \cdot FE = 13$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 7:8$.
10. $AF \cdot FE = 15$ и $\operatorname{ctg}\angle EBC : \operatorname{ctg}\angle BEC = 7:8$.

Задача 6. Найдите значение a, при котором минимальна сумма всех действительных корней уравнения

$$\frac{f(a)\cdot x^2+1}{x^2+g(a)}=\sqrt{\frac{xg(a)-1}{f(a)-x}},$$

где $f(a)=a^2-\sqrt{21}a+26$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{21}a+27$. В ответе укажите найденное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

---

1. $f(a)=a^2-\sqrt{21}a+26$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{21}a+27$.
2. $f(a)=a^2-\sqrt{23}a+25$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{23}a+27$.
3. $f(a)=a^2-\sqrt{22}a+26$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{22}a+27$.
4. $f(a)=a^2-\sqrt{19}a+25$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{19}a+27$.
5. $f(a)=a^2-2\sqrt{5}a+23$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-2\sqrt{5}a+24$.
6. $f(a)=a^2-3\sqrt{2}a+23$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-3\sqrt{2}a+26$.
7. $f(a)=a^2-\sqrt{17}a+21$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{17}a+26$.
8. $f(a)=a^2-\sqrt{15}a+21$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{15}a+23$.
9. $f(a)=a^2-\sqrt{14}a+22$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{14}a+23$.
10. $f(a)=a^2-\sqrt{13}a+22$, $g(a)=\frac{3}{2}a^2-\sqrt{13}a+25$

Задача 7. Многогранник с n вершинами, вписанный в сферу радиуса R, назовем *кристаллическим*, если можно выбрать такой набор из $n-1$ вершины этого многогранника, что все тетраэдры с вершинами в любых 4 точках этого набора равновелики. Каков максимальный объём кристаллического многогранника? В ответе укажите найденное число, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

---

1. $n=106$, $R=3$.
2. $n=107$, $R=6$.
3. $n=119$, $R=3$.
4. $n=119$, $R=7$.
5. $n=101$, $R=7$.
6. $n=104$, $R=5$.
7. $n=107$, $R=2$.
8. $n=110$, $R=5$.
9. $n=116$, $R=4$.
10. $n=116$, $R=6$
11. $n=101$, $R=4$.
12. $n=122$, $R=5$.