ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2014/2015 учебный год

9 класс.

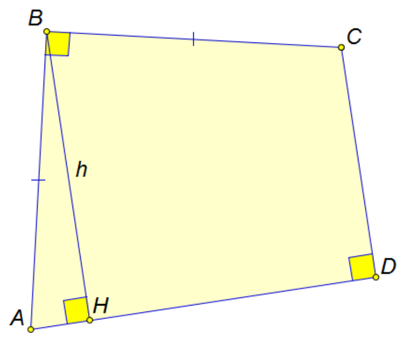
1. В ролевой игре «World of MSU» имеется три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т.е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в k раз меньше, чем воинов (k — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что что игроков, имеющих двойной класс на 2 больше, чем целителей?

   Ответ: 26.

   Решение: Пусть x — количество магов, тогда целителей $2x$, а воинов — $2kx$. Их суммарное количество больше 32, поскольку некоторые игроки совмещают два класса. Очевидно количество игроков, совмещающих два класса равно $x + 2x + 2kx - 32$. Тогда целителей будет $x + 2x + 2kx - 34$, откуда получаем уравнение: $x + 2x + 2kx - 34 = 2x$. Преобразовав, получим $x(2k + 1) = 34$. Таким образом $2k + 1$ — делитель 34, следовательно, $k = 8$ и $x = 2$. Тогда целителей — 4, игроков двойных классов — 6, а все остальные $32 - 6 = 26$ имеют одиночный класс.

2. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Из вершины B опущен перпендикуляр BH на сторону AD.Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $BH = h$.

   Ответ: h^2.



Решение: Отрежем треугольник ABH, приложим его сверху — получим квадрат со стороной h.

3. Будем обозначать $\max(A, B, C)$ наибольшее из чисел A, B, C. Найдите наименьшее значение величины $\max(x^2+|y|, (x+2)^2+|y|, x^2+|y-1|)$.

   Ответ: 1,5.

   Решение: Заметим, что при $x^2 > (x+2)^2$ при $x < -1$ и, наоборот $x^2 < (x+2)^2$ при $x > -1$. Если $x = -1$, то обе эти величины равны 1, в противном случае какая-то из них больше 1. Аналогично можно показать для $|y|$ и $|y-1|$, что при $y = 1/2$ они обе равны $1/2$, а при $y \neq 1/2$ какая-то из них больше. Значит минимум достигается при $x = -1$, $y = 1/2$.

4. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например, $2015 = 1007 + 1008$ или $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$. Сколькими способами можно это сделать?

   Ответ: 16.

   Решение: Сумма k чисел начиная с n равна $S(k,n) = \frac{1}{2}(2n+k-1)\cdot k$. Т.е. надо решить уравнение $(2n+k-1)\cdot k = 4030$ в целых числах. Очевидно, в качестве k можно взять любой делитель $4030 = 2\times 5\times 13\times 31$. Заметим, что каждый из простых множителей (2, 5, 13 и 31) может быть в степени 0 или 1 — итого 16 вариантов.

5. Известно, что при некоторых натуральных a, b, число $N = \frac{a^2+b^2}{ab-1}$ — тоже натуральное. Найдите все возможные значения N.

   Ответ: 5.

6. В треугольник $\triangle ABC$ вписана окружность с центром O, к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите угол $\angle A$ треугольника ABC, если $\angle MON = 26°$.

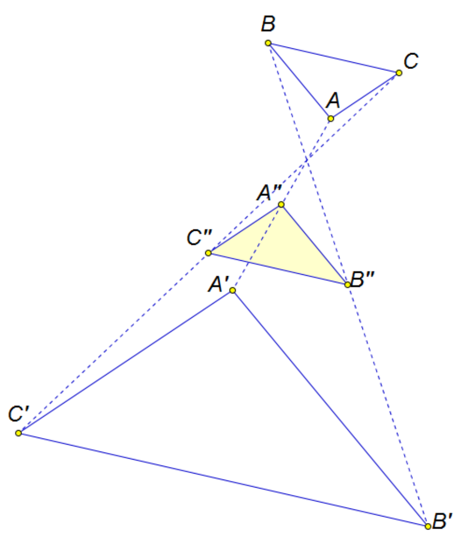
   Ответ: $128°$

7. Найдите наименьшее значение функции $f(x,y) = \frac{2015(x+y)}{\sqrt{2015x^2+2015y^2}}$ и укажите все пары (x,y), при которых оно достигается.

   Ответ: a) $-\sqrt{4030}$. b) $x = y < 0$.

   Решение: $f(x,y) = \pm\sqrt{2015}\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}$. Наименьшее значение достигается, когда $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ достигает максимума, причем $x+y<0$. Заметим, что $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} \leqslant 2$ и равенство достигается при $x = y$. Следовательно минимум исходной функции равен $-\sqrt{2015}\cdot\sqrt{2}$.

8. Дано 2015 попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 10^7. Могут ли они все быть составными?



   Ответ: Нет.

9. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$, площади которых равны 1 и 2025, соответственно. Известно, что лучи AB и $A'B'$ параллельны и идут в противоположных направления (см. рис.). То же верно и для пар BC и $B'C'$, CA и $C'A'$. A'', B'' и C'' — середины отрезков AA', BB' и CC'. Найдите площадь треугольника $A''B''C''$.

   Ответ: 484.

   Решение: Очевидно, треугольники ABC $A'B'C'$ подобны с коэффициентом 45.

Образуются три трапеции, в них $A''B''$, $B''C''$ и $C''A''$ — отрезки, соединяющие середины диагоналей (т.е. равны полуразности оснований). Значит треугольник $A''B''C''$ тоже подобен $\triangle ABC$ и его коэффициент равен $(45-1)/2 = 22$. Следовательно, его площадь в $22^2 = 484$ раз больше площади маленького треугольника.

10. Найдите функцию $f(x)$, о которой известно, что

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3, & \text{при } x \neq 2, \\ 0, & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{3(x+1)(2-x)}{2(x^2+x+1)}$.