*Ответы и решения к варианту **3–1***

1. Пусть t — время в пути автобусов до их встречи в точке C, тогда

$$\frac{t}{16} = \frac{S_{AC}}{S_{CB}} = \frac{25}{t} \Longleftrightarrow t^2 = 16 \cdot 25.$$

Значит $t = 20$.

Ответ: 1 февраля в $16:00$.

Ответ к варианту: *3–2*: 8 февраля в $21:00$.

2. Используя равносоставленность показываем, что искомый объем равен объему цилиндра радиуса $\sqrt{3}$ и высотой 1.

Ответ: 3π.

Ответ к варианту: *3–2*: 9π.

3. Положив $t = \sin x$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, получаем

$$\sqrt{t+\frac{1}{2}} > 2t \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t < 0, \\ t + \frac{1}{2} \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t \geqslant 0, \\ t + \frac{1}{2} \geqslant 4t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{1}{2}.$$

Далее сравнения чисел $-\frac{\pi}{6} < -\frac{1}{2}$, $\frac{5\pi}{6} < \frac{8}{3}$.

Ответ: $[-\frac{1}{2}; \pi/6) \cup (\frac{5\pi}{6}; \frac{8}{3}]$.

Ответ к варианту: *3–2*: $[-2; -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}; \frac{16}{15}]$.

4. Обозначая общее значение логарифмов через t, получаем

$$(5+\sqrt{15})^t = x^2 - 2x - 2, \quad (5-\sqrt{15})^t = -x^2 + 2x + 12.$$

Сложив эти равенства, получаем

$$(5+\sqrt{15})^t + (5-\sqrt{15})^t = 10.$$

Так как функция $(5+\sqrt{15})^t + (5-\sqrt{15})^t$ возрастает, то единственное решение $t = 1$. Откуда $x^2 - 2x - 2 = 5 + \sqrt{15}$.

Ответ: $-7 - \sqrt{15}$.

Ответ к варианту: *3–2*: $-8 - \sqrt{15}$.

5. Перепишем уравнение в виде $(n^2-1)(3^{a-1}+3^{1-a}) = \frac{16n}{3}$. Значения $n = \pm 1$ и $n = 0$ решением не являются. Т.к. $3^{a-1}+3^{1-a} \geqslant 2$, то необходимо $\frac{16n}{3n^2-3} \geqslant 2$ $\Leftrightarrow 3n^2 - 8n - 3 \leqslant 0$ (учитываем, что $|n| > 1$). $n \in \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$. При $n = 2$ получаем $3^{a-1}+3^{1-a} = \frac{32}{9}$, откуда $a = 1 + \log_3 \frac{16\pm5\sqrt{7}}{9}$. При $n = 3$ получаем $3^{a-1} + 3^{1-a} = 2$, откуда $a = 1$.

Ответ: $a = 1$, $a = 1 + \log_3 \frac{16\pm5\sqrt{7}}{9}$.

Решение второго варианта:
Перепишем уравнение в виде $(1-n^2)(2^a + 2^{-a}) = \frac{16n}{3}$. Значения $n = \pm 1$ и $n = 0$ решением не являются. Т.к. $2^a + 2^{-a} \geqslant 2$, то необходимо $\frac{16n}{3-3n^2} \geqslant 2$ $\Leftrightarrow 3n^2 + 8n - 3 \leqslant 0$ (учитываем, что $|n| > 1$). $n \in \left[-3; \frac{1}{3}\right]$. При $n = -2$ получаем $2^a + 2^{-a} = \frac{32}{9}$, откуда $a = \log_2 \frac{16\pm5\sqrt{7}}{9}$. При $n = 3$ получаем $2^a + 2^{-a} = 2$, откуда $a = 0$.

Ответ: $a = 0$, $a = \log_2 \frac{16\pm5\sqrt{7}}{9}$.

Решения варианта 4-1

1. Из условия про 15 кг следует, что в контейненре могут находиться либо только изделия весом 5 и 10 кг, либо только изделия весом 2, 3 и 10 кг. Обозначим буквами x, y, z, u количество находящихся в контейнере изделий весом 2, 3, 5 и 10 кг соответственно.

В первом случае условия задачи задают систему $\begin{cases} u = z + 5, \\ 5z + 10u = 100, \end{cases}$ не имеющую решений в натуральных числах.

Во втором случае для натуральных x, y, u получаем систему уравнений

$$\begin{cases} u = x + y + 5, \\ 2x + 3y + 10u = 100, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + y + 5, \\ 12x = 50 - 13y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2, \\ u = 9. \end{cases}$$

Ответ: по 2 изделия весом 2 и 3 кг, 9 изделий весом 10 кг.

Ответ к варианту: *4–2*: по 2 весом 3 и 5 кг, 12 весом 7 кг.

2. Пусть $\log_2 x = y$. Уравнение примет вид $|y-1|^3+|y+1|^3 = 28$. При $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -1$ функция в левой части уравнения монотонна, поэтому уравнение имеет не более одного решения, которое легко угадывается: $y = 2$ и $y = -2$. При $|y| < 1$ решений нет, т.к. каждое слагаемое в левой части меньше 8.

Ответ: 4 и 1/4.

Ответ к варианту: *4–2*: 27 и 1/3.

3. *Первое решение:* Известно, что $n \equiv$ сумма цифр числа $n(\mod 9)$, $5n \equiv$ сумма цифр числа $5n(\mod 9) =$ сумма цифр $n(\mod 9)$. Тогда $4n \equiv 0(\mod 9)$. Следовательно, n делится на 9 и $n \leqslant 2015$, т.е. $n = 2007$.

Второе решение: Поскольку $2015 \cdot 5 = 10075$, то сумма цифр чисел 2015 и 10075 не совпадает. Аналогично для чисел 2014, 2013, 2012, 2011, 2010, 2009, 2008. Поскольку $2007 \cdot 5 = 10035$, то число 2007 обладает свойством того, что сумма цифр чисел 2007 и $2007 \cdot 5$ совпадает.

Ответ: $n = 2007$.

Ответ к варианту: *4–2*: $n = 2016$.

4. Обозначим $AD = x$. Тогда $AC = 3x$ и, по свойству касательной и секущей, выпущенных из одной точки, $AB = x\sqrt{3}$.

Угол между касательной AB и хордой BD равен вписанному углу, опирающемуся на BD, т.е. $\angle ABD = \angle ACB$. Следовательно, $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ и $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$.

Проведем диаметр окружности BF. Треугольник BDF – прямоугольный, причем $\angle DFB = \angle DCB$ как опирающиеся на одну хорду. Проведем высоту DH в $\triangle ADB$. $\triangle BDH \sim \triangle FBD$ по острому углу и $\frac{BF}{BD} = \frac{BD}{DH}$. Таким образом, $\frac{2R}{BD} = \frac{BD}{DH}$. По теореме косинусов $BD = \sqrt{x^2 + 3x^2 - 2x^2\sqrt{3}\cos\hat{A}}$, из прямоугольного $\triangle AHD$ $DH = x\sin\hat{A}$. В итоге $\frac{R}{BD} = \frac{\sqrt{x^2+3x^2-2x^2\sqrt{3}\cos\hat{A}}}{2x\sin\hat{A}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$.

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{10}{13}}$.

Ответ к варианту: *4–2*: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{\frac{14}{11}}$.

5. Пусть $a = \sin x$, $b = \cos y$. Получаем $\begin{cases} a^2b^2 - 2a + b^2 = 0, \\ 2a^2 - 4a + b^3 + 3 = 0. \end{cases}$ Рассмотрим уравнения в системе как квадратные относительно a. В первом уравнении дискриминант равен $4 - 4b^2$, во втором равен $-8 - 8b^3$. Дискриминанты должны быть неотрицательными, поэтому единственным b, которое может являться решением системы, является $b = -1$. Тогда система имеет единственное решение $a = 1$, $b = -1$.

Ответ: $(\pi/2 + 2\pi n; \pi + 2\pi k)$, $n, k \in Z$.

Ответ к варианту: *4–2*: $(2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi k)$, $n, k \in Z$.

*Ответы к варианту **5***

1. Число больше корня.

$$\sqrt{|8\sqrt{3}-16|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2}=-4.$$

$4x^2+21x+17=0 \Leftrightarrow x=-\frac{17}{4}$, $x=-1$.

Следовательно, $\sqrt{|8\sqrt{3}-16|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}$ больше.

Ответ: Число больше корня.

Ответ к варианту: *5–2*: Число меньше корня.

2. На радиусы окружностей R_1 и R_2 получается система уравнений

$$\begin{cases} R_1\sin\dfrac{\alpha}{2}=R_2\sin\dfrac{\beta}{2} \quad \text{(теорема косинусов)} \\ R_1\cos\dfrac{\alpha}{2}+R_2\cos\dfrac{\beta}{2}=a \quad \text{(соотношения в прямоугольных треугольниках).} \end{cases}$$

Ответ: $R_1=\dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}$, $R_2=\dfrac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}$. **Пример.** $a=5$, $\alpha=90^\circ$, $\beta=60^\circ$. $R_1=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, $R_2=\frac{10}{\sqrt{3}+1}$.

Ответы к другим вариантам: *5–2*: $R_1=\dfrac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$, $R_2=\dfrac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$.

Пример. $a=5$, $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$. $R_1=\frac{10}{\sqrt{3}-1}$, $R_2=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$.

3. $\log_2|\operatorname{tg}\pi x|+\log_4\dfrac{\cos\pi x}{2\cos\pi x+\sin\pi x}=0 \Leftrightarrow \log_2\frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)}=0 \Leftrightarrow$
$\frac{\sin^2\pi x}{\cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2\pi x=\cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x) \\ \cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)\neq 0, \quad \sin\pi x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\pi x=-1,\\ \operatorname{tg}\pi x=2,\end{array}\right. \\ \cos\pi x(2\cos\pi x+\sin\pi x)\neq 0, \quad \sin\pi x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}+n,\ x=\frac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+k.$$

Т.к. $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$, то $x=\frac{11}{4}$, $\frac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+2$.

Ответ: $\frac{11}{4}$; $\frac{\operatorname{arctg}2}{\pi}+2$.

Ответ к варианту: *5–2*: $\frac{7}{4}$; $\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\pi}+1$.

4. Пусть грузоподъёмность автомобиля равна a тонн, а для перевозки 60 тонн песка потребовалось n рейсов. Тогда возможны две ситуации:
а) $n-1$ полных машин и еще не более половины машины: тогда для перевозки 120 тонн нужно будет $2(n-1)+1=2n-1$ рейсов. По условию $2n-1-n=5$, а значит, $n=6$. Ситуация реализуется, если $5a<60$ и $5,5a\geqslant 60$, то есть $\left[10\frac{10}{11};12\right)$.
б) $n-1$ полных машин и еще больше половины машины: тогда для перевозки 120 тонн нужно $2(n-1)+2=2n$ рейсов. По условию $2n-n=5$, а значит $n=5$. Тогда: $4,5a<60$ и $5a\geqslant 60$, то есть $\left[12;13\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\left[10\frac{10}{11};13\frac{1}{3}\right)$ тонн.

Ответ к варианту: *5–2*: $\left[9\frac{1}{11};11\frac{1}{9}\right)$ тонн.

5. Поскольку ввыражение слева и справа — чётные функции, то достаточно рассмотреть случай $x\geqslant 0$.

Первое решение: При $x\in[0;1]$ все преобразования равносильны. При $x\notin[0;1]$ решений нет.

$$x\sqrt{1-x^2}+x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+x^2}-x\Leftrightarrow$$
$$x^2-x^4=1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow 2x\sqrt{1+x^2}=x^4+x^2+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2(1+x^2)=(x^2(x^2+1)+1)^2\Leftrightarrow (x^2(x^2+1)-1)^2=0\Leftrightarrow x^4+x^2-1=0.$$

Т.е. $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Учитывая чётность всех выражений в исходном уравнении $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Второе решение: используем неравенство Коши–Буняковского в $\mathbb{R}^2$ на векторах: $(\sqrt{1-x^2},x)$ и $\pm(x,1)$. Откуда $\pm(x\sqrt{1-x^2}+x)\leqslant 1\cdot\sqrt{1+x^2}$. Равенство достигается, если вектора пропорциональны: $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{x}{1}\Leftrightarrow$ $\sqrt{1-x^2}=x^2\Leftrightarrow x^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ к варианту: *5–2*: $\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$.

март 2015 г.

Решения варианта 6-1

1. Так как $x = 1$ не является корнем исходного уравнения, то

$$(1 - x^3)(1 - x^{11}) = (1 - x^7)^2 \iff x^3(1 - x^4)^2.$$

Ответ: -1; 0.
Ответ к варианту: *6–1*: 0; 1.

2. Пусть первая прогрессия: $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$;а вторая: $b_1, b_2, \dots, b_{2015}$. Знаменатель первой прогрессии обозначим d второй — δ. Тогда

$$\begin{cases} a_1 + 2014d = 4b_1, \\ b_1 + 2014\delta = 4a_1, \\ 2a_1 + 2014d = 4b_1 + 2 \cdot 2014\delta. \end{cases} \iff \begin{cases} 2014d = 4b_1 - a_1, \\ 2014\delta = 4a_1 - b_1, \\ 7a_1 = 2b_1. \end{cases}$$

Откуда $\frac{d}{\delta} = \frac{4b_1 - a_1}{4a_1 - b_1} = 26$.

Ответ: 26. Ответ к варианту: *6–2*: 7.

3. Оценивая каждую из частей неравенства, получаем

$$2 \leqslant \operatorname{tg}^2 \pi(x - y) + \operatorname{ctg}^2 \pi(y - x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2 + 1}} + 1 \leqslant 2,$$

Равенство возможно только при $x = 1$, $\operatorname{tg}^2 \pi(y - 1) = 1$.

Ответ: $(1; (2n + 5)/4)$, $n = -8; -7; -6, \dots, -1, 0, 1, 2, 3$. Ответы к другим вариантам: *7–2*: $(1; (2n + 9)/4)$, $n = -10; -9; -8, \dots, -1, 0, 1$.

4. Пусть L и K — точки, в которых плоскость пересекает ребра SB и SC, соответственно. Тогда $\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} = \frac{SK \cdot SL \cdot SM}{SA \cdot SB \cdot SC}$. В гранях SAB и SAC, решая простые планиметрические задачи, находим $SL : SB = 4 : 9$, $SM : SC = 2 : 5$. Значит

$$\frac{V_{SKLM}}{V_{SABC}} = \frac{SK \cdot SL \cdot SM}{SA \cdot SB \cdot SC} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{16}{135}.$$

Ответ: 16/119. Ответ к варианту: *6–2*: 8/37. *Плоскость сечения (во втором варианте) делит SB в отношении $2 : 3$, а SC в отношении $2 : 1$, считая от S.*

5. Перепишем уравнение в виде

$$5^{(x-1)^2} \log_7((x - 1)^2 + 2) = 5^{2|x-a|} \log_7(2|x - a| + 2).$$

Пусть $f(t) = 5^t \log_7(t + 2)$. Эта функция возрастает. Поэтому

$$f((x - 1)^2) = f(2|x - a|) \iff (x - 1)^2 = 2|x - a|.$$

Три решения будут в случае касания для $a = 1/2$, $a = 3/2$ и в случае когда $a = 1$, поскольку совпадают вершины параболы $y = (x - 1)^2$ и кривой $y = |x - 1|$.

Ответ: $a = 1/2$; 1; 3/2.
Ответ к варианту: *6–2*: $a = -3/2$; -1; $-1/2$.

Решения варианта 7-1

1. Самым старшим может быть или Борис, или Виктор. Но Виктор не мог занять второе место, так как он уступил и Антону, и Григорию. Поэтому Борис — второй. Значит, Григорий — первый, Антон — третий, а Виктор — четвертый.

Ответ: Григорий, Борис, Антон, Виктор.
Ответ к варианту: *7–2*: Андрей, Валерий, Геннадий, Борис.

2. Произведение всех чисел на доске, первоначально равное 2015!, делится последовательно на 1, 2, 3, ..., 2014. После 2014-ти операций останется одно число, равное $\frac{2015!}{2014!} = 2015$.

Ответ: 2015. Ответ к варианту: *7–2*: 2014.

3. Так как можно вписать окружность, то $DA = 2 + 5 - 4 = 3$. Далее можно по теореме косинусов найти диагонали и углы. Проще поступить иначе: так как четырехугольник вписанный, то $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Но так как он описанный, то $p = a + c = b + d$. Отсюда получается $S = \sqrt{abcd} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

Ответ: $2\sqrt{30}$. Ответ к варианту: *7–2*: $6\sqrt{5}$.

4. Вначале решаем уравнение:

$$\begin{aligned}
&\cos 4x - 6\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 0 \iff \\
&2\cos^2 2x - 1 - 6\cos^2 2x + 4(1 + \cos 2x) = 0 \iff \\
&4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 = 0 \iff \\
&\cos 2x = -1/2 \iff \\
&x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ограничения, связанные со знаменателем: $x \in (1; 5)$. Так как $1 < \frac{\pi}{3}$, $5 > \frac{4\pi}{3}$, то $x = \pi/3$; $2\pi/3$; $4\pi/3$.

Ответ: $\pi/3$; $2\pi/3$; $4\pi/3$. Ответ к варианту: *7–2*: $\pi/3$; $2\pi/3$; $4\pi/3$.

5. *Решение.* Можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned}
(|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \dots + |x-2015| + |x+2015| - 4030x) + \\
+ (x-a)^2 + (x - 4030 + a)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Первое выражение в скобках неотрицательно, причём обращается в ноль тогда и только тогда, если $x \geqslant 2015$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 2015 \\ x = a, \\ x - 4030 + a = 0. \end{cases}$$

Откуда, если $a = 2015$, то $x = 2015$; если $a \neq 2015$, то решений нет.

Ответ: Если $a = 2015$, то $x = 2015$; если $a \neq 2015$, то решений нет.

Ответ к варианту: *7–2*: Если $c = 2014$, то $x = 2014$; если $c \neq 2014$, то решений нет, □