ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 учебный год

9 класс

1. Коля участвует в телевизионной игре «Стать миллионером». На вопрос дается 4 варианта ответа: A,B,C,D. Коля получает 4 подсказки:

   - Правильный ответ A или B.
   - Правильный ответ C или D.
   - Правильный ответ B.
   - Ответ D неправильный.

   Известно, что три подсказки ошибочны и только одна правильная. Какой вариант ответа правильный?

   Ответ: D

   Решение: См. решение задачи 1 для 7 класса.

2. Числа 1, 2, ..., 9 расставлены в квадрате 3×3. Будем называть «фэншуйными» такие расстановки, у которых при выборе любых трёх клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках, будет равна 15. Пример «фэншуйной» расстановки приведен на рисунке

4	**1**	7
6	3	9
5	2	**8**

   $1 + 6 + 8 = 15$

   Найдите число всех «фэншуйных» расстановок.

   Ответ: 72.

   Решение: Поставим 1 в какую-нибудь клетку, это можно сделать 9 способами. Не ограничивая общности рассуждений будем считать, что это — верхний левый угол. Вычеркнем первый столбец и первую строку и рассмотрим оставшийся квадрат 2×2. В нем сумма чисел по диагоналям должна равняться 14. Поскольку 14 можно получить как 14=5+9=6+8, то числа 5,6,8,9 должны стоять в этом квадрате, причем числа 5 и 9 стоят на одной из его диагоналей, а 6 и 8 — на другой. Следовательно, можно поставить 5 в произвольную (одну из четырех) клетку, тогда 9 стоит на той же диагонали, а 6 и 8 — на другой, что дает $4 \times 2 = 8$ вариантов. После этого остальные цифры расставляются однозначно. Получаем всего $9 \times 8 = 72$ варианта.

3. Из точки P, расположенной на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника $\triangle ABC$, опущены перпендикуляры на катеты. Эти перпендикуляры разбивают $\triangle ABC$ на три части — два треугольника и прямоугольник. Может ли площадь каждой из этих частей составлять менее $\frac{4}{9}$ площади исходного треугольника?

Ответ: Нет.

Решение: См. решение задачи 4 для 8 класса.

4. У Игоря Горшкова есть все семь книг про Гарри Поттера. Сколькими способами Игорь может расставить эти семь томов на три различные книжные полки, так, чтобы на каждой полке стояла хотя бы одна книга? (Расстановки, которые отличаются порядком книг на полке, считаются различными).

   Ответ: $C_6^2 \times 7! = 75600$.

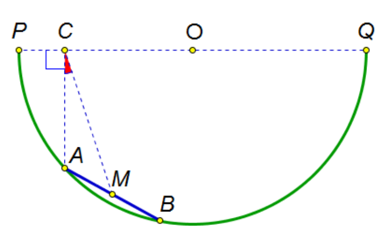
   Решение: Сначала можно переставить книги в произвольном порядке, что дает 7! вариантов. Поставим две перегородки в 6 промежутков между книгами — это можно сделать C_6^2 способами. Перегородки разобьют книги на три части, которые и надо поставить на 1, 2 и 3 полки. Итого получаем $C_6^2 \times 7! = 75600$ вариантов.

5. Найдите сумму всех натуральных чисел, имеющих ровно четыре натуральных делителя, три из которых (из делителей) меньше 15, а четвертый — не меньше 15.

   Ответ: $((2+3+5+7+11+13)^2-(2^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2))/2-6-10-14+27=649$.

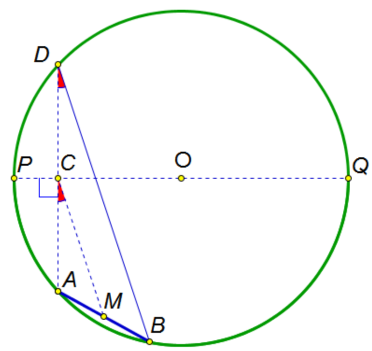
   Решение: Указанные числа N имеют ровно 4 делителя либо если $N=p^3$, либо если $N=pq$, где p и q — простые. В первом случае подходит только 27. Во втором случае надо рассмотреть попарные произведения всех простых чисел меньших 15. Это числа $p_i=2,3,5,7,11,13$. Сумму их попарных произведений можно подсчитать как $S_{pq}=2\cdot(3+5+7+11+13)+3\cdot(5+7+11+13)+5\cdot(7+11+13)+7\cdot(11+13)+11\cdot 13=652$. Из попарных произведений надо отбросить 6, 10 и 14, т.к. они меньше 15. В итоге $S=27+S_{pq}-6-10-14=649$.

6. Знаменитый скейтер Тони Хок катается на скейтборде (отрезок AB) в рампе, которая представляет собой полуокружность с диаметром PQ. Точка M — середина скейтборда, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на диаметр PQ. Какие значения может принимать угол $\angle ACM$, если известно, что угловая мера дуги AB равна 24°?



Ответ: 12°.

Решение: Продлим прямую AC до пересечения с окружностью в точке D (см.рис.). Хорда AD перпендикулярна диаметру PQ, следовательно, она делится им пополам. Поэтому CM — средняя линия в треугольнике ABD, поэтому $CM \| BD$ и, значит, $\angle ACM = \angle ADB$. Угол $\angle ADB$ — вписанный, опирается на дугу AB, следовательно, равен ее половине.



7. В уравнении $x^2 + px + q = 0$ за один шаг разрешается один из коэффициентов (p или q) увеличивать или уменьшать на 1. Можно ли из уравнения $x^2 - 2013x - 13 = 0$ за какое–то количество шагов получить уравнение $x^2 + 13x + 2013 = 0$, чтобы ни одно промежуточное уравнение не имело целых корней?

   Ответ: Нет.

   Решение: Сумма коэффициентов уравнения $x^2 - 2013x - 13 = 0$ равна -2025, сумма коэффициентов уравнения $x^2 + 13x + 2013 = 0$ равна 2027. За один шаг сумма коэффициентов меняется на 1. Значит, в процессе перехода от первого уравнения ко второму эта сумма в какой-то момент станет равной нулю. Следовательно, это уравнение будет иметь целый корень $x = 1$.

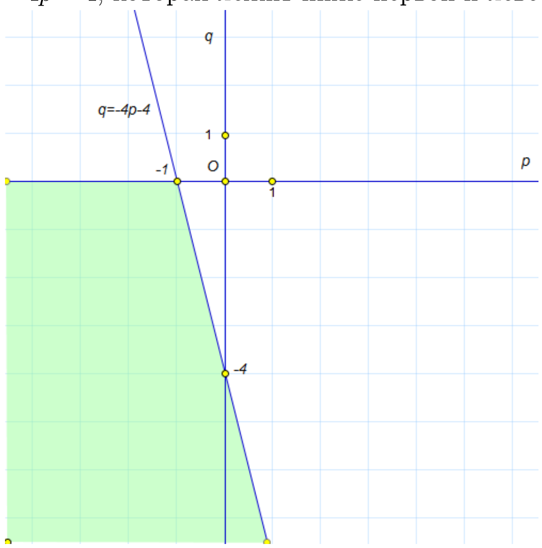
8. В школьной спартакиаде участвовали команды $8^{\text{А}}$, $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ классов. В каждом из соревнований какая-то из этих команд заняла 1-е место, какая-то — 2-е и какая-то — 3-е. По окончании спартакиады были подсчитаны очки: x очков присуждалось за 1-е место, y — за второе и z — за третье ($x > y > z > 0$ — целые числа). В итоге команда $8^{\text{А}}$ получила 22 очка, а команды $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ — по 9 очков. Сколько всего было соревнований и кто занял второе место в соревновании по метанию гранаты, если известно, что первое место по прыжкам через «козла» заняла команда $8^{\text{В}}$?

   Ответ: 5 соревнований, $8^{\text{Б}}$.

   Решение: См. решение задачи 7 для 8 класса.

9. Изобразите на координатной плоскости множество таких точек (p, q), что уравнение $x^2 + 2px + q = 0$ имеет два корня, один из которых больше 2, а другой — меньше 0.

   Ответ: Внутренность угла, образованного прямыми $q = 0$ и $q = -4p - 4$, которая лежит ниже первой и левее второй прямой (см.рис.)

   Решение: Указанное условие равносильно тому, что значения многочлена $f(x) = x^2 + 2px + q$ отрицательны в точках $x = 0$ и $x = 2$. Следовательно, $q < 0$ и $q < -4 - 4p$.

10. Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трех высот выражаются целыми числами.

    Ответ: $3\sqrt{3}$.

    Решение: Обозначим S — площадь, a, b, c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты. Тогда $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, откуда $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$ и $c = \frac{2S}{h_c}$. Подставив в формулу $S = pr = \frac{a+b+c}{2}$, получим $1 = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

    Не ограничивая общности можно считать $h_a \leqslant h_b \leqslant h_c$. Если предположить $h_a > 3$, получим $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Следовательно, $h_a \leqslant 3$. Рассмотрим случаи:

    (a) Случай $h_a = 1$. Тогда $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = 0$, что невозможно.

    (b) Случай $h_a = 2$. Тогда $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}$. Тогда $a = \frac{2S}{h_a} = S$ и $b + c = \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c} = 2S \cdot (\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}) = S$, что противоречит неравенству треугольника.

    (c) Случай $h_a = 3$. Тогда $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{3}$, причем $h_b, h_c \geqslant 3$, что возможно только в случае $h_a = h_b = h_c = 3$. Получаем правильный треугольник со стороной $a = b = c = 2\sqrt{3}$, площадь которого равна $3\sqrt{3}$.