ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2013/2014 учебный год

8 класс

8 класс

1. Коля участвует в телевизионной игре "Стать миллионером". На вопрос дается 4 варианта ответа: A,B,C,D. Коля получает 4 подсказки:

   - Правильный ответ A или B.
   - Правильный ответ C или D.
   - Правильный ответ B.
   - Ответ D неправильный.

   Известно, что три подсказки ошибочны и только одна правильная. Какой вариант ответа правильный?

   Ответ: D

   Решение: См. решение задачи 1 для 7 класса.

2. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в два раза больше, чем цинка, а во втором - в пять раз меньше. В каком отношении следует взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, в котором цинка в два раза больше, чем меди?

   Ответ: 1:2.

   Решение: См. решение задачи 2 для 7 класса.

3. Петров выписывает нечетные числа: 1, 3, 5, ..., 2013, а Васечкин — четные: 2, 4, ..., 2012. Каждый посчитал сумму всех цифр всех своих чисел и сказал отличнице Маше. Маша вычла из результата Петрова результат Васечкина. Сколько у нее получилось?

   Ответ: 1007.

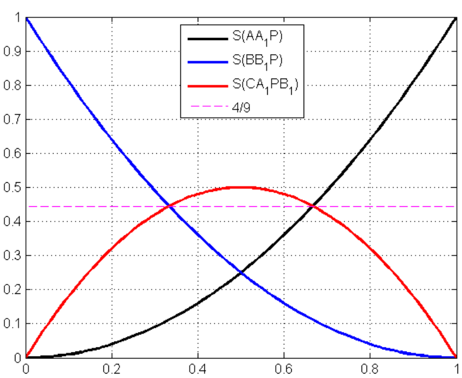
   Решение: Разобьем числа Петрова и Васечкина на пары следующим образом: (2,3), (4,5), ..., (98,99), (100,101), ... (2012,2013), при этом 1 у Петрова останется без пары. Заметим, что в каждой паре сумма цифр второго числа на 1 больше чем первого (т.к. они отличаются только в последнем разряде). А всего таких пар будет $\frac{2012}{2} = 1006$. Следовательно, разность сумм цифр будет равна 1006, а с учетом единицы у Петрова — 1007.

4. Из точки P, расположенной на гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника $\triangle ABC$, опущены перпендикуляры на катеты. Эти перпендикуляры разбивают $\triangle ABC$ на три части — два треугольника и прямоугольник. Может ли площадь каждой из этих частей составлять менее $\frac{4}{9}$ площади исходного треугольника?

   Ответ: Нет.

   Решение: Не ограничивая общности можно считать $S(\triangle ABC) = 1$. Предположим, что $AP = p \times AB$, где p меняется от 0 до 1. Обозначив основания перпендикуляров через A_1 и B_1 выразим через p площади частей: $S(\triangle AA_1P) = p^2$, $S(\triangle BB_1P) = (1-p)^2$ и $S(CA_1PB_1) = 2p(1-p)$. Построив графики зависимости этих площадей от p легко видеть, что все они (площади) не могут быть меньше $\frac{4}{9}$ одновременно.

   Докажем это строго. Предположим, что каждая из площадей меньше $\frac{4}{9}S$. Заметим, что если $p^2 < \frac{4}{9}$, то $p < \frac{2}{3}$. Аналогично получаем $1 - p < \frac{2}{3}$, т.е. p должно лежать на интервале $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Но тогда $2p - 2p^2 = -\frac{1}{2}(4p^2 - 4p + 1 - 1) = -\frac{(2p-1)^2}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}$.



5. Числа 1, 2, ..., 9 расставлены в квадрате 3×3. Будем называть «фэншуйными» такие расстановки, у которых при выборе любых трёх клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках будет равна 15. Пример «фэншуйной» расстановки приведен на рисунке

4	**1**	7
6	3	9
5	2	**8**

$1 + 6 + 8 = 15$

   а) Укажите все «фэншуйные» расстановки, у которых в первой строке стоят цифры 9, 7, 8 (в указанном порядке). b) Найдите количество всех «фэншуйных» расстановок.

Ответ: a)

9	7	8
3	1	2
6	4	5

9	7	8
6	4	5
3	1	2

b) 72.

Решение: a) См. решение задачи 5 для 7 класса.

b) Очевидно, числа 7,8 и 9 должны быть расположены в одном столбце или строке. Выберем какую-то строку (3 способа) и расставим эти числа (6 способов). Проводя рассуждения как в пункте a), получим, что в этом случае существует ровно две «фэншуйные» расстановки. следовательно, существует $3 \times 6 \times 2 = 36$ таких расстановок. Аналогично доказывается, что существует 36 расстановок, в которых читсла 7,8,9 расположены в одном столбце.

6. В школе учится не менее 150 мальчиков, а девочек — на 15% больше чем мальчиков. Когда мальчики поехали на сборы, потребовалось 6 автобусов, причем в каждом автобусе ехало одинаковое количество школьников. Сколько всего человек учится в школе, если известно, что общее число учащихся не больше 400?

   Ответ: 387.

   Решение: Число мальчиков кратно 6, обозначим его $6n$, очевидно, $n \geqslant 25$. Тогда девочек $6n \times 1,15 = 6,9n$. Суммарное количество школьников равно $12,9n \leqslant 400$, поэтому $n \leqslant 31$. Учитывая то, что $6,9n$ должно быть целым и, следовательно, n кратно 10, получим, что $n = 30$, т.е. всего 387 учащихся.

7. В школьной спартакиаде участвовали команды $8^{\text{А}}$, $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ классов. В каждом из соревнований какая-то из этих команд заняла 1-е место, какая-то — 2-е и какая-то — 3-е. По окончании спартакиады были подсчитаны очки: x очков присуждалось за 1-е место, y — за второе и z — за третье ($x > y > z > 0$ — целые числа). В итоге команда $8^{\text{А}}$ получила 22 очка, а команды $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ — по 9 очков. Сколько всего было соревнований и кто занял второе место в соревновании по метанию гранаты, если известно, что первое место по прыжкам через «козла» заняла команда $8^{\text{В}}$?

   Ответ: 5 соревнований, $8^{\text{Б}}$.

   Решение: Обозначим $n \geqslant 2$ — число соревнований в спартакиаде, тогда общее число очков, полученное всеми командами равно $n(x + y + z) = 22 + 9 + 9 = 40$. Но $z \geqslant 1$, $y \geqslant 2$, $x \geqslant 3$, следовательно $x + y + z \geqslant 6$. Рассмотрим возможные варианты: $x + y + z = 8$, $n = 5$; $x + y + z = 10$, $n = 4$ и $x + y + z = 20$, $n = 2$.

   (a) Случай $x + y + z = 10$, $n = 4$. Очевидно, что $x \leqslant 6$ (иначе $8^{\text{В}}$ наберет более 9 очков). Рассмотрим возможные варианты:

   - $x = 6$. Тогда $y = 3$, $z = 1$, но тогда $8^{\text{А}}$ не наберет 22 очка.
   - $x = 5$. Тогда $8^{\text{А}}$ наберет менее 20 очков.

- $x \leqslant 4$. Тогда $x+y+z \leqslant 9$.

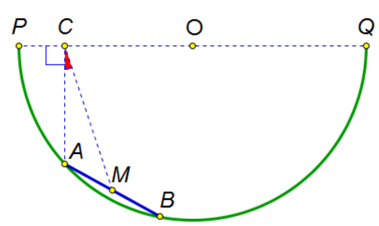
Значит, указанный случай невозможен.

(b) Случай $x+y+z=20$, $n=2$. Если предположить, что $x<11$, то команда $8^{\text{А}}$ не смогла бы набрать 22 очка. Если $x \geqslant 11$, тогда команда $8^{\text{В}}$ в итоге получила бы более 11 очков, что неверно. Значит, указанный случай невозможен.

(c) Случай $x+y+z=8$, $n=5$. Очевидно, в этом случае $z=1$, $x+y=7$. Рассмотрим варианты:

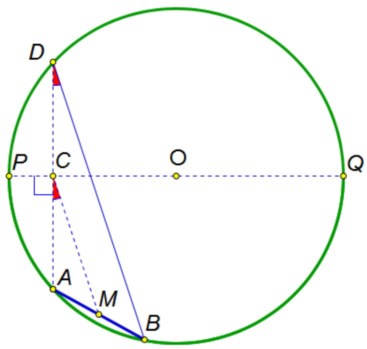
- Допустим $x=4$, $y=3$. Тогда $y+z=4$, следовательно команды $8^{\text{Б}}$ и $8^{\text{В}}$ в каждом соревновании набирали не менее 4 очков. Тогда за 5 соревнований они должны были набрать не менее 20 очков (а на самом деле набрали 9+9=18).
- Допустим $x=5$, $y=2$. Тогда команда $8^{\text{В}}$ один раз заняла 1–е место и 4 раза — последнее. Команда $8^{\text{А}}$ в прыжках через «козла» заняла не первое место. Единственная возможность набрать 22 очка: 2-е место и победа в оставшиеся 4 соревнованиях. Получается, что команда $8^{\text{Б}}$ в этих четырех соревнованиях занимала все время 2-е место (а в прыжках через «козла» — 3-е).

8. Знаменитый скейтер Тони Хок катается на скейтборде (отрезок AB) в рампе, которая представляет собой полуокружность с диаметром PQ. Точка M — середина скейтборда, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на диаметр PQ. Какие значения может принимать угол $\angle ACM$, если известно, что угловая мера дуги AB равна 24°?



Ответ: 12°.

Решение: Продлим прямую AC до пересечения с окружностью в точке D (см.рис.). Хорда AD перпендикулярна диаметру PQ, следовательно, она делится им пополам. Поэтому CM — средняя линия в треугольнике ABD, поэтому $CM \| BD$ и, значит, $\angle ACM = \angle ADB$. Угол $\angle ADB$ — вписанный, опирается на дугу AB, следовательно, равен ее половине.



9. Найдите количество натуральных чисел от 1 до 100, имеющих ровно четыре натуральных делителя, не менее чем три из которых не превосходят 10.

   Ответ: 8.

   Решение: Число имеет ровно 4 натуральных делителя либо если оно является кубом простого числа, либо если оно есть произведение двух простых чисел. Кубы простых чисел (удовлетворяющие условиям): 8 и 27. Простые числа, не большие 10, это — 2,3,5 и 7. Все их попарные произведения удовлетворяют условиям, а их количество равно 6.