ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ

2013/2014 учебный год

7 класс

1. Коля участвует в телевизионной игре "Стать миллионером". На вопрос дается 4 варианта ответа: A,B,C,D. Коля получает 4 подсказки:

   - Правильный ответ A или B.
   - Правильный ответ C или D.
   - Правильный ответ B.
   - Ответ D неправильный.

   Известно, что три подсказки ошибочны и только одна правильная. Какой вариант ответа правильный?

   Ответ: D

   Решение: Хотя бы одна из первых двух подсказок обязана быть верной — иначе правильного ответа нет вообще. Тогда две последние подсказки ошибочны. Поэтому правильным ответом может быть только D. В этом случае все условия выполнены: подсказки 1, 3 и 4 ошибочны, а подсказка 2 правильная.

2. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в два раза больше, чем цинка, а во втором — в пять раз меньше. В каком отношении следует взять эти сплавы, чтобы получить новый сплав, в котором цинка в два раза больше, чем меди?

   Ответ: 1:2.

   Решение: Медь составляет в первом сплаве $\frac{2}{3}$, а во втором — $\frac{1}{6}$ от общей массы. Если взять x кг первого сплава и y кг второго, то сплав будет содержать $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y$ меди, а его масса будет $x + y$. Поскольку в итоговом сплаве медь составляет $\frac{1}{3}$, то можно составить уравнение $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{3}(x + y)$, откуда получим $\frac{1}{3}x = \frac{1}{6}y$, следовательно $x : y = 1 : 2$.

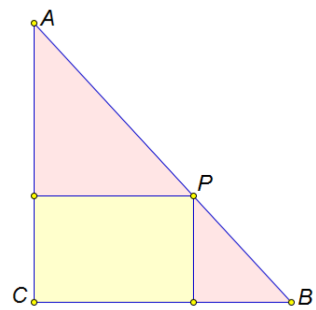
3. Петров выписывает нечетные числа: 1, 3, 5, ..., 2013, а Васечкин — четные 2, 4, ..., 2012. Каждый посчитал сумму всех цифр всех своих чисел и сказал отличнице Маше. Маша вычла из результата Петрова результат Васечкина. Сколько у нее получилось?

   Ответ: 1007.

   Решение: Разобьем числа Петрова и Васечкина на пары следующим образом: (2,3), (4,5), ..., (98,99), (100,101), ... (2012,2013), при этом 1 у Петрова останется без пары. Заметим, что в каждой паре сумма цифр второго числа на 1 больше чем первого (т.к. они отличаются только в последнем разряде). А всего таких пар будет $\frac{2012}{2} = 1006$. Следовательно, разность сумм цифр будет равна 1006, а с учетом единицы у Петрова — 1007.

4. Леночка собралась испечь пирог на день рождения. Она раскатала тесто равномерным слоем в виде равнобедренного прямоугольного треугольника $\triangle ABC$. Потом она подумала, что теста хватит на два пирога и провела два прямолинейных разреза, параллельных катетам треугольника (см. рис.).

   Получилось два треугольника и один прямоугольник. Из прямоугольника Леночка испекла пирог с клубникой, а треугольники слепила вместе, раскатала и сделала пирог с капустой. Может ли получиться так, что в пироге с клубникой теста больше, чем в пироге с капустой?



   Ответ: Нет.

   Решение: Обозначим $p = \frac{AP}{AB}$, тогда отрезанные треугольники (которые пошли на пирог с капустой) подобны исходному с коэффициентами p и $1 - p$. Если площадь исходного треугольника обозначить буквой S, то суммарная площадь пирога с капустой равна $S_{\text{капуста}} = p^2S + (1 - p)^2S = (2p^2 - 2p + 1)S$, следовательно, площадь пирога с клубникой равна $S_{\text{клубника}} = (2p - 2p^2)S$. Вычитая одно из другого, получим $S_{\text{капуста}} - S_{\text{клубника}} = (4p^2 - 4p + 1)S = (2p - 1)^2S$ — не может быть меньше нуля.

5. Числа 1, 2 , ..., 9 расставлены в квадрате 3×3. Будем называть «фэншуйными» такие расстановки, у которых при выборе любых трёх клеток, расположенных в разных столбцах и разных строках, сумма чисел, стоящих в выбранных клетках, будет равна 15. Пример «фэншуйной» расстановки приведен на рисунке

4	**1**	7
6	3	9
5	2	**8**

   $1 + 6 + 8 = 15$

   a) Приведите пример хотя бы одной «фэншуйной» расстановки, у которой в первой строке стоят цифры 9, 7, 8 (именно в таком порядке).
   b) Найдите все «фэншуйные» расстановки, у которых в первой строке стоят цифры 9, 7, 8 (именно в таком порядке) и докажите, что других нет.

Ответ: a), b)

9	7	8
3	1	2
6	4	5

9	7	8
6	4	5
3	1	2

Решение: Заметим, что число 6 можно поставить только в первый столбец, т.к. оно не может стоять с 9 в разных столбцах (т.к. сумма будет больше 15). Его можно поставить во 2-ю или 3-ю строчку. Допустим, его поставили в 3-ю. Тогда, получаем таблицу:

9	7	8
a	b	c
6	d	e

Далее: $6+b+8=15$, следовательно, $b=1$; $9+1+e=15$, следовательно $e=5$; $7+5+a=15$, следовательно, $a=3$; $7+6+c=15$, следовательно, $c=2$; $9+2+d=15$, следовательно $d=4$. Аналогично разбирается случай, когда число 6 расположено во второй строчке.

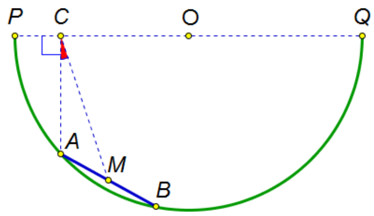
6. Дима пошёл утром в школу, но пройдя ровно полпути, обнаружил, что забыл дома мобильный телефон. Дима прикинул (у него была пятерка за устный счёт), что если он пойдет дальше с той же скоростью, с какой шел, то придет в школу за 3 минуты до звонка на первый урок, а если побежит домой за телефоном, а потом побежит в школу, то прибежит на 3 минуты после звонка. Дима решил сбегать домой, но запыхался, пока бежал (по физкультуре у него была тройка), и из дома в школу шёл уже пешком с обычной скоростью. В результате он опоздал на первый урок на целых 15 минут! Во сколько раз скорость, с которой он бегает, больше скорости, с которой он ходит?

   Ответ: 2.

   Решение: Обозначим x — время, за которое Дима доходит от дома до школы, y — — время, за которое Дима добегает от дома до школы, T — время, оставшееся до звонка (в момент, когда Дима обнаружил пропажу). Тогда условия задачи можно записать как $\begin{cases} \frac{x}{2} = T-3 \\ \frac{y}{2}+y = T+3 \\ \frac{y}{2}+x = T+15 \end{cases}$

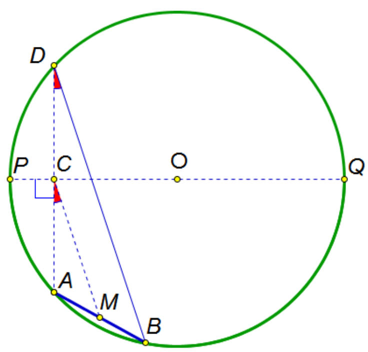
   Решая, получим, что $x=24$, $y=12$, $T=15$, откуда следует, что бегает он в два раза быстрее, чем ходит.

7. Знаменитый скейтер Тони Хок катается на скейтборде (отрезок AB) в рампе, которая представляет собой полуокружность с диаметром PQ. Точка M — середина скейтборда, C — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на диаметр PQ. Какие значения может принимать угол $\angle ACM$, если известно, что угловая мера дуги AB равна $24°$?



Ответ: 12°.

Решение: Продлим прямую AC до пересечения с окружностью в точке D (см.рис.). Хорда AD перпендикулярна диаметру PQ, следовательно, она делится им пополам. Поэтому CM — средняя линия в треугольнике ABD, поэтому $CM \| BD$ и, значит, $\angle ACM = \angle ADB$. Угол $\angle ADB$ — вписанный, опирается на дугу AB, следовательно, равен ее половине.



8. Может ли число $n^2+2n+2014$ делиться (нацело) на 121 при некотором целом n?

   Ответ: Не может.

   Решение: Запишем это число в виде $n^2 + 2n + 2014 = (n+1)^2 + 11 \cdot 183$. Если оно делится на 121, то оно должно делиться и на 11, следовательно, $n+1$ — тоже делится на 11. Тогда $(n+1)^2$ кратно 121, а $11 \cdot 183$ — нет, следовательно, их сумма не делится на 121.