ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

решения задач заочного тура по МАТЕМАТИКЕ
2013/2014 учебный год

7 класс

1. На острове рыцарей и лжецов рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. В школе на этом острове учатся как рыцари, так и лжецы — в одном классе. Однажды учитель спросил у четырех детей: Ану, Бану, Вану и Дану, кто из них сделал домашнее задание. Они ответили:

   - **Ану:** Домашнее задание сделали Бану, Вану и Дану.
   - **Бану:** Домашнее задание не сделали Ану, Вану и Дану.
   - **Вану:** Не верьте им, господин учитель! Ану и Бану — лжецы!
   - **Дану:** Нет, господин учитель, Ану, Бану и Вану — рыцари!

   Сколько рыцарей среди этих детей?

   Ответ: 1

   Решение: Если Вану — рыцарь, то все остальные — лжецы.

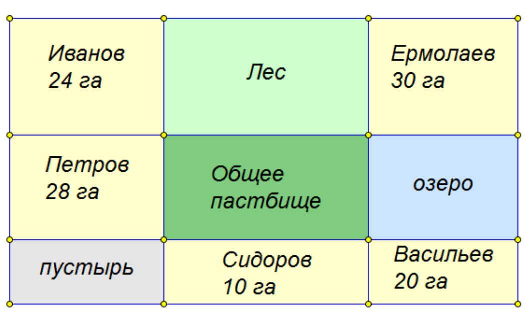
   Пусть Вану — лжец. Тогда Дану — тоже лжец (посокльку говорит, что Вану — рыцарь). А из Ану и Бану по крайней мере один должен быть рыцарем. Оба они рыцарями быть не могут, т.к. противоречат друг другу. В любом случае только один из детей является рыцарем.

2. Найдите наименьшее возможное значение $|2015m^5 - 2014n^4|$, при условии, что m, n — натуральные числа.

   Ответ: 0.

   Решение: Найдем $N = 2014^x \cdot 2015^y$ такое, что $m^5 = 2014^{x-1} \cdot 2015^y$ и $n^4 = 2014^x \cdot 2015^{y-1}$. Для этого x и $y - 1$ должны быть кратны 4, а $x - 1$ и y — 5. Подходят, например, $x = 16$ и $y = 5$. Тогда, если взять $m = 2014^3 \cdot 2015$ и $n = 2014^4 \cdot 2015$, получим $|2015m^5 - 2014n^4| = 0$.

3. Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на чертеже (см. рис.). Найдите площадь общего пастбища.



Ответ: 17,5.

Решение: Поле Васильева в 2 раза больше, чем у Сидорова, следовательно, его ширина в 2 раза больше. из этого вытекает, что площадь леса равна 15 га. Аналогично, площадь поля Иванова относится к площади леса как $24 : 15$, следовательно, так же относится площадь Петрова к общему пастбищу. получаем уравнение $24 : 15 = 28 : x$, откуда $x = 17,5$.

4. Уходя на работу мама поручила Мише, Пете и Васе: а) подмести пол в прихожей; б) помыть посуду; в) купить хлеба; г) заплатить за электричество; д) вынести мусор; е) пропылесосить ковер в гостиной. Скольkими различными способами они могут распределить задания, так, чтобы каждое задание делал кто-то один из ребят и при условии, чтобы каждый что-нибудь делал?

   Ответ: 540.

   Решение: Всего существует $3^6 = 729$ способов распределить задания. Но при этом в $2^6 = 64$ способах все работы будут выполнять Миша и Петя. Также есть 64 способа, когда все работы будут выполнять Петя и Вася, а также 64 — когда Миша и Вася. Если вычесть 3×64, получится, что случаи, когда всю работу выполняет один человек мы вычли по два раза. Поэтому к результату прибавим 3: $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540$.

5. Найдите наибольшее трехзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

   Ответ: 828.

   Решение: Обозначим это число $\overline{aba} = 100a + 10b + a$, где $a \neq b$. Оно должно быть кратно $2a+b$, следовательно, $101a+10b-10(2a+b) = 81a$ тоже кратно $2a + b$.

   Поскольку надо найти наибольшее такое число, рассмотрим $a = 9$. Тогда $81a = 729 = 3^6$, т.е. все делители есть степени тройки, следовательно, $18 + b = 27$, откуда $b = 9$, что противоречит условию $a \neq b$.

   Рассмотрим теперь $a = 8$. Тогда число $81a = 648 = 2^3 \cdot 3^4$ должно делиться на $16 + b$ без остатка, что возможно только при $b = 2$ и $b = 8$ (но последнее противоречит условию $a \neq b$). Значит $a = 8$, $b = 2$.

6. Решите в натуральных числах уравнение

   $$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

   В ответе укажите произведение abc.

   Ответ: 80.

   Решение: $(a+1) \times (b+1) \times (c+1) = abc+ab+bc+ac+a+b+c+1 = 165 = 3 \times 5 \times 11$, следовательно, $a = 2$, $b = 4$ и $c = 10$. Заметим, что решение единственно с точностью до перестановки a, b и c, поскольку 3, 5, 11 — простые числа.

2013/2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»
ПО МАТЕМАТИКЕ

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **95** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **91** балла до **94** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **74** баллов включительно.*

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике*