Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–1** (Челябинск)*

1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, … равна 60, сумма квадратов членов этой прогрессии равна 1200. Найдите сумму новой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен b_1, а знаменатель отличается от знаменателя исходной геометрической прогрессии только знаком.

2. Решите неравенство

$$(\log_5 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 2.$$

3. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $2 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $BO = 2 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

4. Заданы 2014 натуральных чисел. Если выбрать из них любые 100 чисел, то среди них окажется хотя бы одно чётное число. Если выбрать из них любые 1916 чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечётное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться $2014 \cdot 2013$? Ответ обоснуйте.

5. Найдите все значения a, при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения

$$3 \operatorname{tg} a \cdot \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \cdot \cos x + 3 \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0,$$

меньше либо равно $\pi/2$.

март 2014 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **1–2** (Челябинск)*

1. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии b_1, b_2, b_3, … равна 70, сумма квадратов членов этой прогрессии равна 2100. Найдите сумму новой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член равен $(-b_1)$, а знаменатель отличается от знаменателя исходной геометрической прогрессии только знаком.

2. Решите неравенство

$$(\log_7 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_7 x} > 2.$$

3. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1, BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что $4 \cdot AO = 7 \cdot OA_1$, $2 \cdot BO = 9 \cdot OB_1$. Найдите отношение высоты, опущенной из точки A, к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

4. Заданы 2014 натуральных чисел. Если выбрать из них любые 100 чисел, то среди них окажется хотя бы одно чётное число. Если выбрать из них любые 1916 чисел, то среди них окажется хотя бы одно нечётное число. Может ли сумма всех этих чисел равняться $2015 \cdot 2014$? Ответ обоснуйте.

5. Найдите все значения a, при которых расстояние между любыми соседними корнями уравнения

$$3 \operatorname{tg} a \cdot \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos 3a \cdot \cos x + 3 \operatorname{tg} a - \operatorname{ctg} a = 0,$$

меньше либо равно $\pi/2$.

март 2014 г.

Решения варианта 1–2

1. *Решение.* Из формул суммы геометричекой прогресии известно

$$\frac{b_1}{1-q} = 60,$$
$$\frac{b_1^2}{1-q^2} = 1200.$$

Разделив второе уравнение на первое получим $\frac{b_1}{1+q} = 20$, что является ответом.

Замечание. Можно было бы найти и $b_1 = 30$, $q = 1/2$.

Ответ: 20 (вариант 1–2: -30). □

2. *Решение.* О.Д.З. данного неравенства $x > 1$. На области допустимых значений равносильны переходы:

$$(\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 1 \Longleftrightarrow$$
$$(\log_2 x - 1) \cdot \log_3 \log_5 x > 0 \Longleftrightarrow$$
$$(x-2) \cdot (\log_5 x - 1) > 0 \Longleftrightarrow$$
$$(x-2) \cdot (x-5) > 0.$$

Ответ: $x \in (1; 2) \cup (5; +\infty)$ (вариант 1–2: $x \in (1; 2) \cup (7; +\infty)$). □

3. *Решение.* Используя, основное свойство биссектрисы находим:

$$AB : BC : AC = 4 : 2 : 3.$$

Откуда

$$\frac{h_a}{r} = \frac{2S/a}{S/p} = \frac{2p}{a} = \frac{2+3+4}{2} = \frac{9}{2}.$$

Ответ: 9/2 (вариант 1–2: 11/4). □

4. *Решение.* Из условия следует, что чётных чисел не меньше, чем 1915, а нечётных чисел не меньше, чем 99. Поэтому чётных чисел 1915, нечётных чисел 99, их сумма — нечётное число и оно не равно $2014 \cdot 2013$.

Ответ: Нет. □

5. *Решение.* Уравнение вида

$$2t^2 f(a) + \sqrt{2} t g(a) + h(a) = 0.$$

Условие означает, что решения должны быть $\pm 1/\sqrt{2}$. Поэтому

$$\begin{cases} f(a) + g(a) + h(a) = 0, \\ f(a) - g(a) + h(a) = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(a) = 0, \\ f(a) + h(a) = 0. \end{cases}$$

Т.е. исходное уравнение равносильно

$$\begin{cases} \cos 3a = 0, \\ 3 \operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} a. \end{cases}$$

Ответ: $a = \pm\pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. □

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–1** (Уфа)*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{9-x}\cdot|x^2-1|\leqslant\sqrt{9-x}\cdot|x^2-10x+13|.$$

2. Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

3. Решите уравнение

$$6\cos 9x\cdot\cos 2x=1+3\cos 11x+2\cos^3 7x.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра SA, SB, SC не длиннее, чем 3, 4 и 5, соответственно, а площади граней SAB, SAC, SBC не меньше, чем 6, 15/2 и 10, соответственно. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y-a^2+5(a-1)=(a^2-5a+6)(x-3)^6+\sqrt{(x-3)^2},\\ x^2+y^2=2(3x-4)\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

март 2014 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **2–2** (Уфа)*

1. Решите неравенство

$$\sqrt{7-x}\cdot|x^2-3|\leqslant\sqrt{7-x}\cdot|x^2-14x+27|.$$

2. Два брата родились в один день, но в разные годы. Оказалось, что в 2014 году каждому из них исполнилось столько лет, какова сумма цифр его года рождения. Определите год рождения каждого из братьев.

3. Решите уравнение

$$6\cos 9x\cdot\cos 2x=1+3\cos 11x+2\cos^3 7x.$$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ рёбра SA, SB, SC не длиннее, чем 3, 4 и 5, соответственно, а площади граней SAB, SAC, SBC не меньше, чем 6, 15/2 и 10, соответственно. Найдите объём пирамиды $SABC$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y-a^2+5(a-1)=(a^2-5a+6)(x-5)^6+\sqrt{(x-5)^2},\\ x^2+y^2=2(5x-12)\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

март 2014 г.

Решения

1. *Решение.* Неравенство равносильно

$$\sqrt{9-x}\cdot(|x^2-10x+13|-|x^2-1|)\geqslant 0 \iff$$
$$\sqrt{9-x}\cdot(x^2-10x+13-x^2+1)(x^2-10x+13+x^2-1)\geqslant 0 \iff$$
$$\sqrt{9-x}\cdot(-5x+7)(x^2-5x+6)\geqslant 0 \iff$$
$$\sqrt{9-x}\cdot(x-7/5)(x-2)(x-3)\leqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;7/5]\cup[2;3]\cup\{9\}$ (вариант 2–2: $(-\infty;15/7]\cup[3;4]\cup\{7\}$). □

2. *Решение.* Если какой-то из братьев родился в $\overline{19xy}$ году, то по условию получаем уравнение $1900+10x+y+(1+9+x+y)=2014 \Leftrightarrow 11x+2y=104$. Поскольку x и y — цифры, то решение этого уравнения единственное: $x=8$, $y=8$.

Если же кто-то из братьев родился в $\overline{20xy}$ году, то аналогично получаем уравнение $11x+2y=12$, откуда $x=0$, $y=6$.

Ответ: 1988 и 2006. □

3. *Решение.* Решаем уравнение вида

$$6\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=1+3\cos(\alpha+\beta)x+2\cos^3(\alpha-\beta)x.$$

Из равенства $2\cos\alpha x\cdot\cos\beta x=\cos(\alpha+\beta)x+\cos(\alpha-\beta)x$ получаем, что исходное уравнение равносильно

$$2\cos^3(\alpha-\beta)x-3\cos(\alpha-\beta)x+1=0.$$

Сделав замену $t=\cos(\alpha-\beta)x$, приходим к уравнению $2t^3-3t+1=0$, которое имеет корень $t=1$. Делением в столбик находим $2t^3-3t+1=(t-1)(2t^2+2t-1)$. Откуда получаем корни

$$t_1=1,\quad t_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Корень $t_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}>1$, а потому не подходит. Таким образом

$$\cos(\alpha-\beta)x=1\quad \cos(\alpha-\beta)x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{2\pi k}{7}$, $x=\pm\frac{\arccos((\sqrt{3}-1)/2)}{7}+\frac{2\pi l}{7}$, $k,l\in\mathbb{Z}$. □

4. *Решение.* Площадь боковой грани SAB, по условию, не меньше 6. С другой стороны, она равна

$$\frac{1}{2}\cdot SA\cdot SB\cdot\sin\angle ASB\leqslant\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 1=6.$$

Следовательно, $SA=3$, $SB=4$, $\sin\angle ASB=1$, т.е. SA перпендикулярно SB. Аналогично получаем, что $SC=5$ и SC перпендикулярно SA и SB. Поэтому объём пирамиды равен $1/6\cdot 3\cdot 4\cdot 5=10$.

Ответ: 10. □

5. *Решение.* Второе уравнение преобразуется к виду $(x-3)^2+y^2=1$. Поэтому если пара чисел $(3+t_0;y_0)$ является решением системы, то решением будет и пара $(3-t_0;y_0)$. Значит, единственным решением может являться или $(3;1)$, или $(3;-1)$. Первая пара является решением при $a=1$ или $a=4$, вторая — при $a=2$ или $a=3$. При $a=1$ или $a=4$ система приводится к виду

$$\begin{cases} y-1=2(x-3)^6+|x-3|,\\ (x-3)^2+y^2=1\end{cases}$$

и имеет ровно одно решение $(3;1)$, так как при $x\neq 3$ из первого уравнения следует $y>1$, что невозможно. При $a=2$ или $a=3$ система приниамет вид

$$\begin{cases} y+1=|x-3|,\\ (x-3)^2+y^2=1.\end{cases}$$

Откуда находим три решения: $(3;-1)$, $(4;0)$, $(2;0)$.

Ответ: 1 и 4 (в варианте 2–2 ответ такой же). □

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–1** (Воронеж)*

1. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$3xy - y + 3x = 1008.$$

2. В треугольнике ABC стороны AB и BC соответственно равны 3 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол BAC.

3. Общий вес рюкзаков двух туристов за время похода уменьшился на $12\frac{1}{3}\%$. При этом вес рюкзака первого туриста уменьшился на 15%, а вес рюкзака второго — на 10%. Известно также, что в конце похода рюкзак второго туриста весил на $1,2$ кг больше, чем рюкзак первого туриста в начале похода. Определите первоначальный вес рюкзаков каждого из туристов.

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4-x^2}{3}} \frac{2}{3x^2+x} \geqslant -1.$$

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$4 - \sin^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \sin 7x - \cos^2 7x - \cos^2 \pi a = 0.$$

март 2014 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **3–2** (Воронеж)*

1. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие уравнению

$$5xy + y - 5x = 1038.$$

2. В треугольнике ABC стороны AB и BC соответственно равны 4 и 1. Биссектриса BD равна $\sqrt{2}$. Найдите угол ACB.

3. Общий вес рюкзаков двух туристов за время похода уменьшился на $12\frac{1}{3}\%$. При этом вес рюкзака первого туриста уменьшился на 15%, а вес рюкзака второго — на 10%. Известно также, что в конце похода рюкзак второго туриста весил на $1,2$ кг больше, чем рюкзак первого туриста в начале похода. Определите первоначальный вес рюкзаков каждого из туристов.

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{4-x^2}{3}} \frac{2}{3x^2+x} \geqslant -1.$$

5. Для каждого значения a решите уравнение

$$3 + \cos^2 x + \cos 4x + \cos 2x + 2\sin 3x \sin 7x - \cos^2 7x - \cos^2 \pi a = 0.$$

март 2014 г.

Решения

1. *Решение.* Исходное уравнение равносильно $(3x-1)(y+1)=1007$. Остается заметить, что $1007=19\cdot 53$, и перебором целых делителей решить уравнение.

Ответ: $x=18$, $y=18$ (в варианте 3–2: $x=12$, $y=18$). $\square$

2. *Решение.* Из основного свойства биссектрисы вытекает $AD:DC=3:1$. Пусть $DC=x$, $AD=3x$. Справедливо

$$BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC.$$

Откуда $2=3(1-x^2)$ и $x=1/\sqrt{3}$. Из теоремы косинусов в треугольнике ABD, находим

$$2=9(1+x^2)-18x\cos\angle BAC.$$

Следовательно $\cos\angle BAC=5/(3\sqrt{3})$.

Ответ: $\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$ (в варианте 3–2: $\arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$). $\square$

3. *Решение.* Пусть вес рюкзака первого туриста x и второго — y в начале похода. Условие равносильно системе

$$\begin{cases} x\cdot\frac{17}{20}+y\cdot\frac{9}{10}=(x+y)\cdot\frac{263}{300}, \\ 1.2+x=y\cdot\frac{9}{10}. \end{cases}$$

Ответ: 42 кг и 48 кг. $\square$

4. *Решение.* О.Д.З. данного неравенства $x\in(-2;-1)\cup(-1;-1/3)\cup(0;1)\cup(1;2)$.

На О.Д.З. справедливо

$$\left(\frac{1-x^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3x^2+x}-\frac{3}{4-x^2}\right)\geqslant 0 \iff$$
$$\left(\frac{1-x^2}{3}\right)\cdot\left(\frac{8-3x-11x^2}{x(3x+1)(2-x)(2+x)}\right)\geqslant 0 \iff$$
$$\frac{(1-x)(1+x)^2(-11)(x-8/11)}{x(3x+1)(2-x)(2+x)}\geqslant 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалом и пересекаем с О.Д.З.

Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;-\dfrac{1}{3})\cup(0;\dfrac{8}{11}]\cup(1;2)$. $\square$

5. *Решение.* Исходное уравнение равносильно

$$(\sin 7x+\sin 3x)^2+(\cos 3x+\cos x)^2+\sin^2\pi a=0.$$

Ответ: При $a\in\mathbb{Z}$, $x=\pi/4+\pi k/2$, $k\in\mathbb{Z}$, при других a решений нет. $\square$

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–1 (Чебоксары)

1. Дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, ..., о которой известно следующее: $a_1 = 20$; $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014}.

2. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен $60°$. Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 - 2014a^3 + 2014a^2 - 2014a + 2013)x = a^3 + 5a^2 + 2a - 8$$

есть неотрицательные числа.

4. Решите уравнение
$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

5. На основании прямого кругового конуса расположены три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвертый шар того же радиуса касается первых трех и боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

март 2014 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант 4–2 (Чебоксары)

1. Дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, ..., о которой известно следующее: $a_1 = 40$; $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите все значения, которые может принимать a_{2014}.

2. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы внутренних углов треугольника при вершинах A и B пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Угол между биссектрисами равен $60°$. Длина стороны AB равна 3. Найдите площадь треугольника A_1B_1O.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди решений уравнения

$$(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013)x = a^3 + 3a^2 - 6a - 8$$

есть неотрицательные числа.

4. Решите уравнение
$$\frac{\cos 5x + \cos x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{1 + \cos 4x}{\cos x}.$$

5. На основании прямого кругового конуса расположены три попарно касающихся друг друга шара одинакового радиуса. Каждый из них касается также боковой поверхности конуса. Четвертый шар того же радиуса касается первых трех и боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса, если радиус окружности, образованной точками касания четвёртым шаром боковой поверхности конуса, равен $\sqrt{2}$.

март 2014 г.

Решения

1. *Решение.* Пусть $a_2 = 0$. Тогда последовательность состоит только из нулей, т.е. $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \cdots = 0$. Следовательно, $a_{2014} = 0$. Пусть $a_2 \neq 0$. Положим $a_1 = x$, $a_2 = y$, тогда последовательность будет иметь вид: x, y, y/x, $1/x$, $1/y$, x/y, x, y, $\ldots$, то есть будет периодической с периодом 6. Так как $2014 = 6 \cdot 335 + 4$, то $a_{2014} = a_4 = 1/x = 1/20$.

Ответ: 0, 1/20 (в варианте 4–2: 0, 1/40). □

2. *Решение.* Угол между биссектрисами равен углу при вершине C, $\angle C = 60^\circ$. Точки A_1 и B_1 лежат на перпендикулярах к сторонам треугольника, опущенным из точки O — центра описанной окружности. Отсюда следует, что угол $\angle A_1OB_1 = 120^\circ$. Радиус окружности можно найти по теореме синусов $R = \frac{3}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$. Тогда площадь искомого треугольника равна $S = 0,5\sqrt{3}\sqrt{3}\sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. □

3. *Решение.* Исходное уравнение равносильно

$$(a^2+1)(a-1)(a-2013)x = (a-1)(a+2)(a+4).$$

Ответ: $[-4;-2] \cup \{1\} \cup (2013;+\infty)$ (в варианте 4–2: $(-2013;-4] \cup \{-1\} \cup [2;+\infty)$). □

4. *Решение.* Поскольку $\cos 4x + \cos 2x = 2\cos 3x \cos x$, то О.Д.З данного уравнения $\cos 3x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Поскольку $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$, то исходное уравнение равносильно

$$\frac{1+\cos 4x - \cos 2x}{\cos x} = 0.$$

Откуда $\cos 2x = 0$ и $\cos 2x = 1/2$, т.е. $x = \pi/4 + \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \pm\pi/6 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Учитывая О.Д.З данного уравнения получаем ответ.

Ответ: $x = \pi/4 + \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. □

5. *Решение.* Центры шаров образуют правильный тетраэдр. Угол α между высотой и боковым ребром рассчитается и совпадает с углом между высотой и образующей конуса, а также с углом между радиусом упомянутой в условии окружности и радиусом 4-го шара, проведенными в одну точку.

1) Пусть α — указанный угол. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

2) Пусть r — радиус окружности в плоскости касания конуса четвертым шаром.

3) Образующая l собирается из кусочков. $x_1 = \dfrac{r}{\sin\alpha}$ (от вершины конуса до точки касания конуса четвертым шаром).

$x_2 = 2R$, где R — радиусы шаров (расстояние между двумя точками касания — нижнего и верхнего шаров соответственно). $R = \dfrac{r}{\cos\alpha}$, т.е. $x_2 = \dfrac{2r}{\cos\alpha}$.

$x_3 = \dfrac{R}{\operatorname{tg}(\pi/4 - \alpha/2)}$, что с учетом формулы для R привело меня к $x_3 = \dfrac{r}{1-\sin\alpha}$.

x_3 — расстояние от основания конуса до точки касания нижнего шара.

Итого $l = x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}(3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

4) Объем конуса $V = \dfrac{\pi}{3}(l\sin\alpha)^2 \cdot (l\cos\alpha)$. После всех подстановок и упрощений получаем $V = \dfrac{\pi}{6}(3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}\left(3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right)^3$ □

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***5–1*** *(Саратов)*

1. Решите уравнение $\cos(11x + \pi/4) = \sin(17x + \pi/4)$.

2. Туристический автобус, вмещающий не более 50 человек, привез группу школьников после экскурсии в кафе. Школьники расселись в кафе так, что за несколькими столами оказалось по три девочки и одному мальчику, за другими несколькими столами по два мальчика и по одной девочке и еще за одним столом оказались одна девочка и один мальчик. Какое максимальное количество школьников могло быть на экскурсии, если известно, что девочек в группе в полтора раза больше, чем мальчиков?

3. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O, при этом $\angle AOB = 75^\circ$, $AB = 3$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC.

4. Найдите все значениях a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

5. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение так, что оно проходит через точки K, L, M, лежащие на ребрах DC, DB, DA соответственно. При этом $DK : KC = 1 : 3$, $DL : LB = 2 : 1$, $DM : MA = 1 : 1$. Найдите угол между плоскостями грани ABC и построенного сечения.

март 2014 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

Вариант ***5–2*** *(Саратов)*

1. Решите уравнение $\sin(14x + \pi/4) = \cos(20x + \pi/4)$.

2. Туристический автобус, вмещающий не более 50 человек, привез группу школьников после экскурсии в кафе. Школьники расселись в кафе так, что за несколькими столами оказалось по три девочки и одному мальчику, за другими несколькими столами по два мальчика и по одной девочке и еще за одним столом оказались одна девочка и один мальчик. Какое максимальное количество школьников могло быть на экскурсии, если известно, что девочек в группе в полтора раза больше, чем мальчиков?

3. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром O, при этом $\angle COD = 105^\circ$, $AB = 4$. Найдите площадь круга, ограниченного описанной вокруг треугольника ABE окружностью, где E — точка пересечения прямых AD и BC.

4. Найдите все значениях a, при которых уравнение

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + a^2 - a - 2 = 0$$

имеет решение.

5. В правильном тетраэдре $ABCD$ проведено сечение так, что оно проходит через точки K, L, M, лежащие на ребрах DC, DB, DA соответственно. При этом $DK : KC = 1 : 3$, $DL : LB = 2 : 1$, $DM : MA = 1 : 1$. Найдите угол между плоскостями грани ABC и построенного сечения.

март 2014 г.

Решения

1. *Решение.* Уравнение равносильно $\sin(\pi/4 - 11x) = \sin(17x + \pi/4)$. Откуда либо $\pi/4 - 11x = 17x + \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $\pi - (\pi/4 - 11x) = 17x + \pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi k/14$, $\pi/12 + \pi n/3$, $k, n \in \mathbb{Z}$ (в варианте 5–2: $\pi k/17$, $-\pi/12 + \pi n/3$, $k, n \in \mathbb{Z}$). □

2. *Решение.* Девочек было $d = 3k + n + 1$, а мальчиков — $m = k + 2n + 1$. Здесь k и n — количество 4-х и 3-х-местных столов соответственно. По условию задачи получаем линейное диофантово уравнение: $(3k + n + 1) = 3/2(k + 2n + 1) \Rightarrow 3k = 4n + 1$ решение которого записывается в виде $n = 3l + 2$, $k = 4l + 3$. Тогда общее число туристов равно $d + m = 3(4l + 3) + (3l + 2) + (4l + 3) + 2(3l + 2) + 1 = 25l + 20$. При $l = 1$ получается ответ.

Ответ: 45. □

3. *Решение.* Сумма углов ABO и BAO равна 105°, поэтому сумма углов AB и BAD равна 210°. Значит, сумма углов ABE и BAE равна 150°, т. е. $\angle BEA = 30°$. По теореме синусов $R = AB/(2\sin 30°) = 3$. Поэтому площадь круга равна 9π.

Ответ: 9π (в варианте 5–2: 16π). □

4. *Решение.* После некоторых преобразований приведем уравнение к виду:

$$\log_2^2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 2(a-1)\log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + a^2 - 3a = 0$$

Делаем замену переменных $t = \log_2\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ и приходим к уравнению $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$. Определим область изменения t. В силу того, что функция $y = \frac{2x}{1+x^2}$ при положительном x меняется в пределах от нуля до единицы, получается, что t меняется в пределах $t \in (-\infty, 0]$. Тогда исходная задача может быть сформулирована в терминах переменной t:

«Найти все значения параметра a, при которых уравнение $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 3a = 0$ имеет решения при $t \in (-\infty, 0]$».

Это возможно, если корни разного знака, или хотя бы один из корней равен нулю, или оба корня отрицательны. Первая и вторая ситуации описываются условием $a(a-3) \leqslant 0$, третья — системой неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)^2 - a(a-3) = a + 1 \geqslant 0, \\ 1 - a \leqslant 0, \\ a(a-3) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [0; \infty)$. □

5. *Решение.* Примем сторону тетраэдра за 12. Угол будем искать через косинус, который равен отношению площади S_1 треугольника $K_1L_1M_1$ — проекции треугольника KLM на плоскость основания, к площади S_2 самого треугольника KLM — сечения . Площадь проекции S_1 определяется несложно, так как вершины K_1, L_1, M_1 — делят соответствующие радиусы описанной окружности основания (площадь основания $S_0 = 36\sqrt{3}$) в тех же отношениях как и соответствующие им точки K, L, M делят боковые стороны тетраэдра.

$$S_1 = \frac{1}{3} \cdot S_0 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{24} S_0 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Стороны сечения будем вычислять по теореме косинусов: $KL = 7$, $LM = \sqrt{52}$, $MK = 3\sqrt{3}$. Теперь вычислим площадь сечения. Косинус угла α, лежащего напротив стороны KL равен $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{156}}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{156}}$. Для площади сечения получим следующий результат $S_2 = 0,5 \cdot 3\sqrt{3}\sqrt{52}\frac{\sqrt{131}}{\sqrt{156}} = \frac{3}{2}\sqrt{131}$.

Теперь последнее действие:

$\cos\gamma = \frac{S_1}{S_2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}$.

Ответ: $\cos\gamma = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{131}}$. □

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–1** (Иркутск)*

1. Для некоторого натурального k десятичная запись числа k^2+6k заканчивается цифрой 6. Найдите все значения, которые может принимать предпоследняя цифра этой записи.

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}}}\geqslant 1\,.$$

3. Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

4. Решите уравнение
$$\sin^2\left(\frac{2013x}{2}\right)\cdot\cos^2(2014x)\cdot\sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right)=1\,.$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+a^2-4=2a\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$
имеет единственное решение.

март 2014 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»

*Вариант **6–2** (Иркутск)*

1. Для некоторого натурального k десятичная запись числа k^2+2k-8 заканчивается цифрой 6. Найдите все значения, которые может принимать предпоследняя цифра этой записи.

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}}}\geqslant 1\,.$$

3. Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Через середины одного катета и гипотенузы провели окружность, касающуюся другого катета. Найдите отношение части гипотенузы, лежащей внутри получившегося круга, ко всей гипотенузе.

4. Решите уравнение
$$\sin^4\left(\frac{2013x}{2}\right)\cdot\cos^2(2014x)\cdot\sin^2\left(\frac{2015x}{2}\right)=1\,.$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+a^2-4=2a\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$
имеет единственное решение.

март 2014 г.

Решения

1. Ответ: 1 (во всех вариантах).

Решение. (варианта 6-1). Представим k в виде $k=10a+b$, где a, b – целые числа и $1 \leqslant b \leqslant 9$. Тогда $k^2+6k=10(10a^2+2ab+6a)+b^2+6b$. Выражение b^2+6b оканчивается на 6 только, если $b=2$. Но в этом случае $k^2+6k=100(a^2+a)+16$, а значит, предпоследняя цифра равна 1.

В варианте 6-2 надо учесть, что $k^2+2k-8=(k-2)^2+6(k-2)$. $\square$

2. Ответ: $x \in (0;3] \cup (8;+\infty)$.

Решение. Так как при неположительных значениях x левая часть не определена, то, домножая числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$, получим равносильное неравенство $\dfrac{x-4}{\sqrt{x+1}-3} \geqslant 1$. Замена $t=\sqrt{x+1}$ сводит это неравенство к неравенству $\dfrac{t^2-5}{t-3} \geqslant 1 \iff t \in [-1;2] \cup (3;+\infty)$. Следовательно, либо $\sqrt{x+1} \leqslant 2$, либо $\sqrt{x+1}>3$, и потому $x \in [-1;3] \cup (8;+\infty)$. Учитывая, что $x>0$, получим ответ. $\square$

3. Ответ: $\frac{2}{5}$ или $\frac{11}{40}$.

Решение. Введем обозначения. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC окружность касается катета AC в точке P, проходит через середину L катета BC и через середину K гипотенузы $AB=2x$, причем F – вторая точка пересечения окружности и гипотенузы AB. Пусть $\alpha=\angle A$, тогда $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ или $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Возможны два случая: 1) F лежит между K и B; 2) F лежит между A и K.

Так как LK – средняя линия, то $LK=x\cos\alpha$, $PC=\frac{1}{2}x\cos\alpha \Rightarrow AP=\frac{3}{2}x\cos\alpha$. По теореме о касательной и секущей в соответствующих случаях получим:

1) $\frac{9}{4}x^2\cos^2\alpha=x(x+KF) \Rightarrow KF=(\frac{9}{4}\cos^2\alpha-1)x$. Следовательно, $\cos\alpha>\frac{2}{3}$, и $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $\frac{KF}{AB}=\frac{1}{2}(\frac{9}{4}\cos^2\alpha-1)=\frac{2}{5}$;

2) $\frac{9}{4}x^2\cos^2\alpha=x(x-KF) \Rightarrow KF=(1-\frac{9}{4}\cos^2\alpha)x$. Следовательно, $\cos\alpha<\frac{2}{3}$, и $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Тогда $\frac{KF}{AB}=\frac{1}{2}(1-\frac{9}{4}\cos^2\alpha)=\frac{11}{40}$. $\square$

4. Ответ: $x=\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как $|\sin t| \leqslant 1$, $|\cos t| \leqslant 1$, то косинус и синусы в левой части должны быть равны ±1. Рассмотрим два случая:

1) $\cos(2014x)=1 \Rightarrow x=\frac{\pi n}{1007}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\frac{2013x}{2}=\pi n-\frac{x}{2}$, $\frac{2015x}{2}=\pi n+\frac{x}{2}$ и исходное уравнение сводится к уравнению $\sin^2\frac{x}{2}=1 \iff x=\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Получим $\frac{\pi n}{1007}=\pi+2\pi k$, т.е. $n=1007(2k+1) \in \mathbb{Z}$ при любых $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos(2014x)=-1 \Rightarrow x=\frac{\pi+2\pi n}{2014}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\frac{2013x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n-\frac{x}{2}$, $\frac{2015x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n+\frac{x}{2}$ и исходное уравнение сводится к уравнению $\cos^2\frac{x}{2}=1 \iff x=2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Уравнение $4028\pi k=\pi+2\pi n$ не имеет решений в целых числах. $\square$

5. Ответ: $a=0$, $a=3$.

Решение. Так как подстановка $x \mapsto \frac{1}{x}$ не меняет уравнения, то для единственности решения необходимо, чтобы $x=\frac{1}{x} \iff x=\pm1$. Выясним, когда каждое из этих значений x является единственным решением уравнения.

1) Если $x=1$, то $a^2=2a \iff a=0; a=2$.

При $a=0$ уравнение $2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}=4$ имеет единственное решение.

При $a=2$ уравнение $2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}=4\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ имеет бесконечно много решений на промежутке $(0;+\infty)$. Действительно, график (монотонно убывающей!) функции $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ расположен в полосе $1 \leqslant y \leqslant 2$, и следовательно, график функции $y=2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}$ лежит в полосе $2 \leqslant y \leqslant 4$. В то же время функция $y=4\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ по-очередно принимает значения -4 и 4 бесконечное число раз при $x \to +\infty$, так как уравнения $\frac{x^2-1}{2x}=2\pi n$ и $\frac{x^2-1}{2x}=\pi+2\pi k$ имеют положительное решение при всех $k, n \in \mathbb{N}$.

2) Если $x=-1$, то $1+a^2-4=2a \iff a=-1; 3$.

При $a=3$ уравнение $2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+5=6\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ имеет единственное решение, так как $2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}+5 \geqslant 6 \geqslant 6\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ и одновременные равенства возможны лишь при $x=-1$.

При $a=-1$ уравнение $2^{\frac{(x+1)^2}{x^2+1}}-3=-2\cos\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ имеет бесконечно много решений (рассуждения аналогичны рассмотренному выше случаю $a=2$). $\square$

Решения и ответы к задачам заключительного этапа олимпиады «Покори Воробьевы горы!» по математике

Москва, 10 – 11 класс

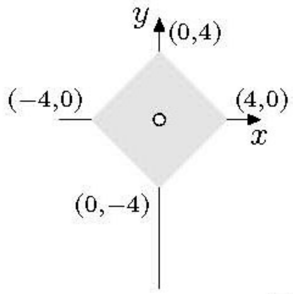
1. В периодической десятичной дроби 0,242424… первую цифру после запятой заменили на 4. Во сколько раз полученное число больше исходного?

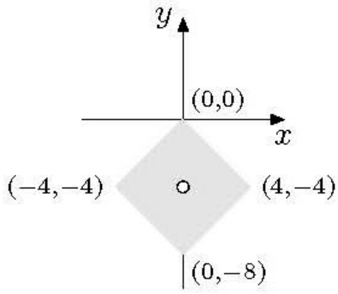
Решение. Исходная дробь находится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\dfrac{24}{100\left(1-\dfrac{1}{100}\right)}=\dfrac{24}{99}$ (другой способ: обозначим исходную дробь через x, тогда $100x=24+x$, поэтому $x=\dfrac{24}{99}$). После замены цифры получилось число $\dfrac{24}{99}+\dfrac{2}{10}\ =\dfrac{438}{99\cdot 10}$. Искомое отношение: $\dfrac{438}{99\cdot 10}\cdot\dfrac{99}{24}=\dfrac{438}{240}=\dfrac{73}{40}$.

Ответы в разных вариантах: в $\dfrac{73}{40}$ раз; в $\dfrac{16}{5}$ раз; в $\dfrac{53}{20}$ раз; в $\dfrac{20}{9}$ раз.

2. Найдите все значения y, при каждом из которых ни одно значение x, удовлетворяющее неравенству $\log_2\left(|x|+|y|\right)\leqslant 2$, не удовлетворяет неравенству $\log_{\frac{1}{2}}\left(|x|+|y+4|\right)\geqslant -2$.

Решение. Решения первого неравенства на плоскости Oxy образуют квадрат с вершинами в точках (0; 4), (4; 0), (0; -4), (-4; 0) без точки с координатами (0; 0). Решение у первого неравенства существует только если $y\in[-4;4]$.





Решения второго неравенства на плоскости Oxy образуют квадрат с вершинами в точках (0; 0), (4; -4), (0; -8), (-4; -4) без точки с координатами (0; -4). У второго неравенства существует решение только если $y\in[-8;0]$.

Следовательно, при $y \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$ ни один x, являющийся решением первого неравенства не является решением второго неравенства.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$.

Ответы в разных вариантах: $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$; $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$; $(-\infty; 0] \cup [9; +\infty)$; $(-\infty; -8] \cup [0; +\infty)$.

3. Окружность радиуса *a* проходит через вершины *A* и *B* треугольника *ABC* и пересекает стороны *AC* и *BC* в точках *M* и *K* соответственно. Найдите площадь треугольника *ABC*, если $AB = a\sqrt{3}$, $MK = a$, а центр окружности находится внутри треугольника *ABC* на расстоянии *b* от точки *C*. В разных вариантах *a* и *b* были разными.

Решение. Пусть $CM = x$, $CK = y$. Треугольники ABC и KMC подобны, так как $\angle CMK = \pi - \angle AMK = \angle ABC$. Тогда $AC = y\sqrt{3}$, $BC = x\sqrt{3}$ и площадь ΔABC равна $\frac{3}{2}xy\sin\angle C$. Из того, что $AC \cdot MC$ равно квадрату длины касательной из точки C, получаем $xy\sqrt{3} = b^2 - a^2$. По теореме синусов $\sin\angle AMB = \frac{AB}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и так как центр окружности находится внутри треугольника, то $\angle AMB = 60°$. Далее $\sin\angle MBK = \frac{MK}{2a} = \frac{1}{2}$, $\angle MBK = 30°$ и $\angle C = \angle AMB - \angle MBK = 30°$. Площадь ΔABC равна $\frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C = \frac{3xy}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2 - a^2\right)$.

Ответы в разных вариантах: $6\sqrt{3}$; $8\sqrt{3}$; $12\sqrt{3}$; $24\sqrt{3}$.

4. Определите минимальное значение величины $|x + y|$ при условии, что числа x и y удовлетворяют соотношению $5\cos(x + 4y) - 3\cos(x - 4y) - 4\sin(x - 4y) = 10$.

Решение. Вводим $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$ и получаем $\cos(x+4y) - \cos(x-4y-\varphi) = 2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cos(x+4y) = 1, \\ \cos(x-4y-\varphi) = -1. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} x = \frac{\varphi+\pi}{2} + \pi(n+k), \\ y = -\frac{\varphi+\pi}{8} + \frac{\pi(n-k)}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$x + y = \frac{3\varphi+\pi}{8} + \frac{\pi(5n+3k+1)}{4}$ для любых целых n и k. Отсюда

$|x+y| = \left|\frac{3\varphi+\pi}{8} - \frac{\pi m}{4}\right|$, где m – произвольное целое число. Так как $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{3}$, то

$\frac{\pi}{8} < \frac{3\varphi+\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$ и поэтому минимум выражения $|x+y|$ достигает при $m=1$.

Ответы в разных вариантах: $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{8}\arccos\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arccos\frac{4}{5}$; $\frac{3}{8}\arccos\frac{3}{5} - \frac{\pi}{16}$;

$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arccos\frac{4}{5}$.

5. Одно основание правильной n-угольной призмы ($n \geqslant 3$) имеет n общих точек со сферой радиуса 3; другое основание имеет с этой сферой одну общую точку. Какие значения может принимать объём призмы?

Решение. Если основание призмы имеет n общих точек со сферой, то это основание вписано в соответствующую окружность. Тогда второе основание касается сферы в центре основания. Опишем вокруг призмы цилиндр (его объем больше объема призмы) и будем искать возможные значения объема цилиндра.

Пусть радиус сферы равен R, а высота цилиндра равна $R+x$, где $x \in (-R; R)$.

Тогда радиус цилиндра равен $\sqrt{R^2 - x^2}$, а его объем равен $V = \pi\left(R^2 - x^2\right)(R+x)$.

Исследуем эту функцию при $x \in (-R; R)$. Так как $V'(x) = \pi\left(-2xR - 2x^2 + R^2 - x^2\right)$

$= -\pi\left(3x^2 + 2Rx - R^2\right) = -3\pi(x+R)\left(x - \frac{R}{3}\right)$, то максимум $V(x)$ достигается при

$x = \frac{R}{3}$ и равен $\frac{32}{27}\pi R^3$, минимум стремится к нулю при $x \to -R$ (когда высота цилиндра стремится к нулю) и при $x \to R$ (когда радиус цилиндра стремится к нулю). Значит, для цилиндра искомое отношение принимает значения из промежутка $\left(0; \frac{32}{27}\pi R^3\right]$. Поэтому для пирамиды имеем промежуток $\left(0; \frac{32}{27}\pi R^3\right)$ (отношение приближается к значению $\frac{32}{27}\pi R^3$ сколь угодно близко при $n \to \infty$).

Ответы в разных вариантах: $(0; 32\pi)$; $\left(0; \frac{32\pi}{9}\right)$; $(0; 256\pi)$; $\left(0; \frac{64\pi}{9}\right)$.

Тем, кто получил верный ответ не для произвольного, а для заданного значения n, задача тоже была засчитана, так как в пределе там получается тот же ответ.

2013/2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников

«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»

ПО МАТЕМАТИКЕ

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **95** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **91** балла до **94** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **74** баллов включительно.*

---

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Покори Воробьевы горы!» по математике*