Решение задач заочного тура ПВГ, 10–11 классы, 2012–2013

1. Карлсон заполнил конический фужер лимонадом и отпил половину по высоте (считая от поверхности жидкости до вершины конуса), а вторую половину допил Малыш. Во сколько раз Карлсон выпил лимонаду больше, чем Малыш?

   Ответ: в 7 раз.

   Решение. Пусть r и h — радиус основания и высота конического фужера соответственно. Тогда объём лимонада во всём фужере равен $V_{\text{фуж}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Объём лимонада, выпитый Малышом, равен $V_{\text{Мал}} = \frac{1}{3}\pi (r/2)^2 (h/2) = \frac{V_{\text{фуж}}}{8}$. Следовательно, Карслон выпил $\frac{7}{8}V_{\text{фуж}}$, т.е. в 7 раз больше Малыша.

2. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{7}{3}.$$

   Ответ: $\mathbf{(2;2;1); (2;4;-1); (3;-1;-2); (3;-2;2); (1;1;-4).}$

   Решение. Сначала рассмотрим случай, когда $\left|y + \frac{1}{z}\right| \geqslant 1 \Leftrightarrow \cfrac{1}{\left|y + \cfrac{1}{z}\right|} \leqslant 1.$

Возможны варианты: 1) $x = 2 \;\Rightarrow\; \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; y + \frac{1}{z} = 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = 4 \\ z = -1. \end{cases}$

2) $x = 3 \;\Rightarrow\; \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; y + \frac{1}{z} = -\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y = -2 \\ z = 2. \end{cases}$

Осталось рассмотреть случай $\left|y + \frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \cfrac{1}{\left|y + \cfrac{1}{z}\right|} > 1$, что возможно только при $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1. \end{array}\right.$

3) $y = 0$ — не подходит, т.к. $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = x + z$ является целым числом, а $\frac{7}{3}$ — нецелое.

4) $y = 1$. Тогда $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = x + \frac{z}{z+1} = x + 1 - \frac{1}{z+1} = \frac{7}{3} \Rightarrow z = -4,\ x = 1.$

5) $y = -1$. Тогда $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = x + \frac{z}{-z+1} = x - 1 + \frac{1}{1-z} = \frac{7}{3} \Rightarrow z = -2$. Но тогда $y + \frac{1}{z} = -\frac{3}{2}$, что не подпадает под рассматриваемый случай.

3. Решите уравнение

$$\sin\left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \ldots + \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1.$$

Ответ: $\boldsymbol{x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.}$

Решение. Во-первых, заметим, что

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) + \ldots + \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 0.$$

Действительно, семь точек тригонометрической окружности вида $x + i \cdot \frac{2\pi}{7}$ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ образуют вершины правильного семиугольника, поэтому сумма радиус-векторов с концами в этих точках равна нулю (так как при повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ вокруг начала координат набор этих векторов не меняется, следовательно, не меняется и вектор, равный их сумме, а значит, он равен нулю), как и сумма их ординат, т.е. соответствующих синусов.

Во-вторых, учитывая равенства

$$\begin{array}{ll} \sin\left(x + 3^2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \sin\left(x + 3^3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \\ \sin\left(x + 3^4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), & \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right), \end{array}$$

получаем, что левая часть исходного уравнения равна

$$\sin\left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \ldots + \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 0 - \sin x,$$

а само это уравнение записывается в виде

$$-\sin x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Какие значения может принимать угол при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что можно провести ровно три прямые, делящие площадь и периметр этого треугольника пополам.

Ответ: $2\arcsin(\sqrt{2} - 1) < \alpha < \pi$**.**

Решение. Пусть $BC = a$ — основание треугольника, α и β — углы при вершине и основании соответственно. $AC = AB = b$. Одна прямая, делящая площадь и периметр равнобедренного треугольника пополам существует всегда: она проходит через вершину треугольника перпендикулярно основанию. Найдём, как могут проходить две другие прямые.

Рассмотрим два случая.

1) Прямая, делящая площадь и периметр этого треугольника пополам, проходит через боковые стороны, отсекая от них части, равные bx и by соответственно $(0 \leqslant x; y \leqslant 1)$. Тогда часть отсекаемого периметра равна $P_1 = b(x + y) = \dfrac{2b + a}{2}$, а площадь отсекаемого треугольника равна $S_1 = \dfrac{1}{2} xyb^2 \sin\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} b^2 \sin\alpha\right)$, откуда получаем, что $y = \dfrac{1}{2x}$. Подставляя эту замену в соотношение для периметров, получаем

$$bx + \frac{b}{2x} = \frac{2b + a}{2}.$$

Получаем квадратное уравнение

$$2bx^2 - (2b + a)x + b = 0, \tag{1}$$

дискриминант которого равен $D = a^2 + 4ab - 4b^2$. Так как $a = 2b\sin\frac{\alpha}{2}$, то $D = 4b^2(\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2} - 1)$. Следовательно, в этом случае уравнение имеет два решения, если $\sin\frac{\alpha}{2} > \sqrt{2} - 1$, одно — если $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$ и ни одного если $\sin\frac{\alpha}{2} < \sqrt{2} - 1$. Заметим, что два решения соответствуют паре симметричных (относительно оси симметрии равнобедренного треугольника) прямых, проходящих через боковые стороны.

Проанализируем, когда существуют эта пара прямых. Сделаем замену $t = \sin\frac{\alpha}{2}$ и заметим следующее. Если $1 \geqslant t > \dfrac{1}{2}$, то корни уравнения (1)

$$x_{1,2} = \frac{2b(1+t) \pm 2b\sqrt{t^2+2t-1}}{4b} = \frac{1+t \pm \sqrt{t^2+2t-1}}{2}$$

обладают свойством:

$x_2 = \dfrac{1+t+\sqrt{t^2+2t-1}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+2t-1} > 1-t \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{2}$. Формула для меньшего корня $x_1 = \dfrac{1+t-\sqrt{t^2+2t-1}}{2}$ влечёт, что $y = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{1+t-\sqrt{t^2+2t-1}} = \dfrac{1+t+\sqrt{t^2+2t-1}}{2} > 1$, т.е. рассматриваемых в этом случае прямых при $t > \dfrac{1}{2}$ не существует, а при $\sqrt{2}-1 < t \leqslant \dfrac{1}{2}$ их две. (При $t = \dfrac{1}{2}$ они проходят через вершины B и C).

Таким образом, в этом случае, три указанных прямых существуют при $2\arcsin(\sqrt{2}-1) < \alpha \leqslant 60^\circ$.

2) Прямая, делящая площадь и периметр этого треугольника пополам, проходит через основание и боковую сторону, отсекая от них части, равные ax и by соответственно $(0 \leqslant x; y \leqslant 1)$. Тогда часть отсекаемого периметра равна $P_1 = xa + by = \dfrac{2b+a}{2}$, а площадь отсекаемого треугольника равна $S_1 = \dfrac{1}{2}(ax)(by)\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}ab\sin\beta)$, откуда получаем, что $y = \dfrac{1}{2x}$. Подставляя эту замену в соотношение для периметров, получаем

$$xa + \frac{b}{2x} = \frac{2b+a}{2},$$

что приводит квадратному уравнению $2ax^2 - (2b+a)x + b = 0$. Его решениями являются $x_1 = \dfrac{b}{a}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$. Если $x = x_1 = \dfrac{b}{a}$, то $y_1 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{a}{2b} < 1$ при всех a и b, при которых существует треугольник ABC. Если $x = x_2 = \dfrac{1}{2}$, то $y = 1$, т.е. это вертикальная прямая, проходящая через вершину равнобедренного треугольника перпендикулярно основанию. Так как $x \leqslant 1$, то вторая прямая (и третья в силу симметрии треугольника) существует при условии $\dfrac{b}{a} \leqslant 1$, что равносильно $\alpha \geqslant 60^\circ$ (или же $\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{1}{2}$).

Таким образом, три прямых, удовлетворяющих условию задачи, существуют при $\alpha > 2\arcsin(\sqrt{2}-1)$.

5. Мальвина и Буратино играют по следующим правилам: Мальвина записывает на доске в ряд шесть различных чисел, а Буратино придумывает для них свои четыре числа x_1, x_2, x_3, x_4 и под каждым числом Мальвины пишет соответственно какую-либо из сумм x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_4, x_2+x_3, x_2+x_4, x_3+x_4 (каждую по разу), после чего за каждую сумму, равную стоящему над ней числу, Буратино получает по 3 яблока, а за бóльшую его — по 1 яблоку. Какое наибольшее количество яблок может гарантированно получить Буратино?

Ответ: 14.

Решение.

Решение. Пусть Мальвина написала числа $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$. Если Буратино придумает числа $x_1 = (a_1+a_2-a_3)/2$, $x_2 = (a_1+a_3-a_2)/2$, $x_3 = (a_2+a_3-a_1)/2$, $x_4 = a_4 - x_3$, то, написав $x_1+x_2 = a_1$ под a_1, $x_1+x_3 = a_2$ под a_2, $x_2+x_3 = a_3$ под a_1, $x_3+x_4 = a_4$ под a_4, $x_1+x_4 \geqslant a_4 \geqslant a_5$ под a_5 и $x_2+x_4 \geqslant a_4 \geqslant a_6$ под a_6, он получит 14 яблок.

Чтобы получить более 14 яблок, Буратино должен обеспечить по крайней мере 5 равенств, что не всегда возможно: среди любых 5 сумм, составляемых Буратино, есть такие 4, что сумма двух из них равна сумме двух других. Поэтому если Мальвина напишет такие 6 чисел, что сумма никаких двух из них не равна сумме двух других (например, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000), то Буратино не сможет получить 15 или больше яблок.

6. Найдите все четырёхзначные числа $\overline{abcd}$ (где a, b, c, d — цифры десятичной записи), каждое из которых служит делителем хотя бы одного из трех образованных по нему четырёхзначных чисел $\overline{bcda}$, $\overline{cdab}$, $\overline{dabc}$.

Ответ: Все числа вида $\overline{abab}$, где a и b — любые цифры, кроме нуля (таких чисел 81).

Решение.

Из условия задачи следует, что найдется $k \in \mathbb{N}$, такое, что выполняется по крайней мере одно из равенств:

$$\text{(I)} \quad k \cdot \overline{abcd} = \overline{bcda}; \qquad \text{(II)} \quad k \cdot \overline{abcd} = \overline{cdab}; \qquad \text{(III)} \quad k \cdot \overline{abcd} = \overline{dabc}.$$

Поскольку все числа $\overline{abcd}$, $\overline{bcda}$, $\overline{abcd}$, $\overline{dabc}$ четырёхзначные, имеем $1 \leqslant k \leqslant 9$ и $a, b, c, d \neq 0$.

Последовательно разберём все случаи. Вычитая левую и правую часть уравнения (I) соответственно из левой и правой части равенства $10 \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd0}$, получаем

$$(10-k)\overline{abcd} = 9999a. \tag{2}$$

Поскольку $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$, обе части уравнения (2) делятся на простое число 101 и в силу ограничений $1 \leqslant 10-k \leqslant 9$ получаем $\overline{abcd} \,\vdots\, 101 \;\Leftrightarrow\; \overline{ab} = \overline{cd}$. Разделим уравнение (2) на 101:

$$(10-k)\overline{ab} = 99a.$$

Теперь учтём, что обе части полученного уравнения делятся на 11 и, опять же в силу неравенств $1 \leqslant 10-k \leqslant 9$ получим $\overline{ab} \,\vdots\, 11 \;\Leftrightarrow\; a = b$. Таким образом, решениями уравнения (I) являются в точности все числа вида $\overline{aaaa}$ (при $k = 1$).

Уравнение (II) вычтем из равенства $100 \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd00}$. Получим

$$(100-k)\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 9999. \tag{3}$$

Аналогично случаю (I) имеем $\overline{abcd} \,\vdots\, 101 \;\Leftrightarrow\; \overline{ab} = \overline{cd}$. Разделим уравнение (3) на 101:

$$(100-k)\overline{ab} = \overline{ab} \cdot 99.$$

Следовательно, решением уравнения (II) являются в точности все числа вида $\overline{abab}$ (при $k = 1$).

Уравнение (III) вычтем из равенства $1000 \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd000}$. Получим

$$(1000-k)\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot 9999. \tag{4}$$

При $1 \leqslant k \leqslant 9$ имеем НОД$(101, (1000-k)) = 1 \;\Rightarrow\; \overline{abcd} \,\vdots\, 101 \;\Leftrightarrow\; \overline{ab} = \overline{cd}$. Разделим уравнение (4) на 101:

$$(1000-k)\overline{ab} = \overline{aba} \cdot 99.$$

Далее, при $1 \leqslant k \leqslant 9$ имеем НОД$(11, (1000-k)) = 1 \;\Rightarrow\; \overline{ab} \,\vdots\, 11 \;\Leftrightarrow\; a = b$. Следовательно, решениями уравнения (III) являются в точности все числа вида $\overline{aaaa}$ (при $k = 1$).

Очевидно, что все решения уравнений (I), (III) содержатся среди решений уравнения (II).

7. При каких значениях a уравнение

$$[x]^2 + 2012x + a = 0$$

(где $[x]$ — целая часть числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x) имеет наибольшее количество решений? Каково это количество?

Ответ: 89 решений при $1006^2 - 2012 < a \leqslant 1006^2 - 1936$**.**

Решение. Обозначим $[x] = k$. Уравнение задачи можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x = -\dfrac{k^2+a}{2012}, \\ k \leqslant x < k+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

а сама задача сводится к нахождению значений параметра a, при которых система

$$\begin{cases} k^2 + 2012k + a \leqslant 0, \\ k^2 + 2012k + a + 2012 > 0, \end{cases}$$

имеет наибольшее количество решений в целых числах.

Решением первого неравенства является отрезок $[-1006 - \sqrt{1006^2 - a}; -1006 + \sqrt{1006^2 - a}]$ при условии $a \leqslant 1006^2$.

Решением второго неравенства при $a > 1006^2 - 2012$ будет вся действительная прямая, а при $a \leqslant 1006^2 - 2012$ — множество
$(-\infty; -1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}) \cup (-1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}; +\infty)$.

Таким образом, решения системы образуют:

при $1006^2 - 2012 < a \leqslant 1006^2$ — отрезок $[-1006 - \sqrt{1006^2 - a}; -1006 + \sqrt{1006^2 - a}]$;

при $a \leqslant 1006^2 - 2012$ — множество
$[-1006 - \sqrt{1006^2 - a}; -1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}) \cup (-1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}; -1006 + \sqrt{1006^2 - a}]$.

Суммарная длина множества решений в этом случае равна

$$2(\sqrt{1006^2 - 2012 - a} - \sqrt{1006^2 - a} = \frac{4024}{\sqrt{1006^2 - 2012 - a} + \sqrt{1006^2 - a}}$$

и она монотонно уменьшается при уменьшении a.

Найдем максимальное количество решений при $a > 1006^2 - 2012$. Параметр можно представить в виде $a = 1006^2 - 2012 + b$, $b > 0$. Решения образуют отрезок $[-1006 - \sqrt{2012 - b}; -1006 + \sqrt{2012 - b}]$ и чем меньше b, тем этот отрезок больше.

Так как $44^2 = 1936 < 2012 < 2025 = 45^2$, то количество целых точек на этом отрезке максимально при $\sqrt{2012 - b} \geqslant 44 \Leftrightarrow b \leqslant 76$ $(b > 0)$. Следовательно, при $1006^2 - 2012 < a \leqslant 1006^2 - 1936$ количество целочисленных решений равно количеству целых точек на отрезке $[-1006 - 44; -1006 + 44]$, т.е. 89.

При $a = 1006^2 - 2012$ из решения пропадает точка $k = -1006$. При дальнейшем уменьшении a новые целые точки -1006 ± 45 в множестве
$[-1006 - \sqrt{1006^2 - a}; -1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}) \cup (-1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}; -1006 + \sqrt{1006^2 - a}]$
впервые появятся при $a = 1006^2 - 45^2 = 1006^2 - 2025$. Но при этом из решения надо исключить целые точки, лежащие на отрезке $[-1006 - \sqrt{1006^2 - 2012 - a}; -1006 + \sqrt{1006^2 - 2012 - a}] = [-1006 - \sqrt{13}; -1006 + \sqrt{13}]$, т.е. 7 точек: -1006; -1006 ± 1; -1006 ± 2; -1006 ± 3. Так как при дальнейшем уменьшении a суммарная длина множества решений уменьшается, то и количество целых точек тоже буде уменьшаться.

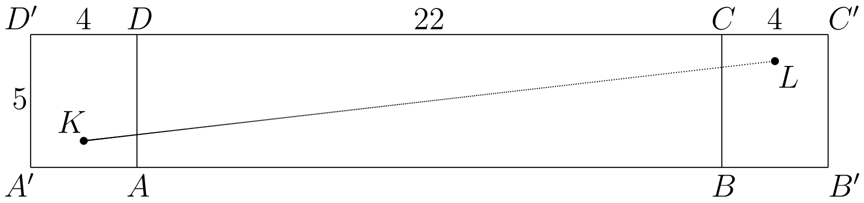
8. В координатном пространстве найдите длину кратчайшего пути между точками $(0;1;2)$ и $(22;4;2)$ по поверхности прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x = 22$, $y = 5$, $z = 4$ и тремя координатными плоскостями.

Ответ: $\sqrt{657}$.

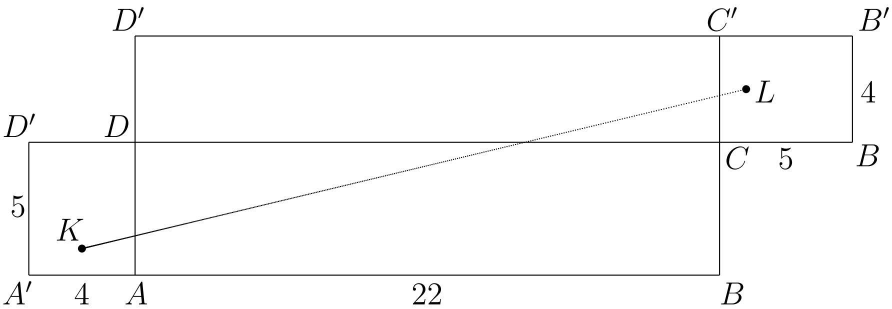
Решение. В силу симметрии конфигурации относительно плоскости $\pi(x;y;2)$ (проходящей через точки K и L параллельно основанию $ABCD$) можно считать, что кратчайший путь проходит не выше плоскости π и тем самым не имеет общих точек с верхним основанием $A'B'C'D'$.

Далее, если путь не проходит через внутренние точки основания $ABCD$, то его длина не меньше длины его проекции на плоскость основания, то есть половины периметра $ABCD$, равной $(22+5) = 27$. Это значение достигается на горизонтальном пути KL, лежащем в плоскости π.

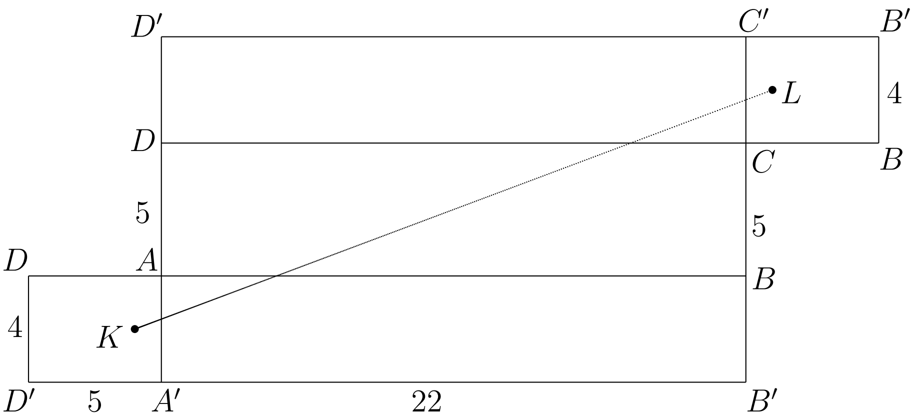
Остается рассмотреть случаи, когда путь проходит через грань $ABCD$. Поскольку кратчайший путь не должен заходить дважды на одну и ту же грань, имеются три возможные развертки:



В этом случае имеем $KL = \sqrt{(2+22+2)^2 + (5-1-1)^2} = \sqrt{26^2+3^2} = \sqrt{685}$.



В этом случае имеем $KL = \sqrt{(2+22+1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{25^2+6^2} = \sqrt{661}$.



В этом случае имеем $KL = \sqrt{(1+22+1)^2 + (2+5+2)^2} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{657}$.

Поскольку $27 > \sqrt{685} > \sqrt{661} > \sqrt{657}$, получаем ответ $\sqrt{657}$.

9. В классе, состоящем из 21 ученика, любые три ученика ровно один раз делали вместе домашнее задание, причем либо по математике, либо по русскому языку. Можно ли утверждать, что в

этом классе существует четвёрка учеников, любые трое из которых делали вместе домашнее задание по одному и тому же предмету?

Ответ: Можно

Решение. Отделим от группы из 21 человека одного (присвоим ему номер 0), а для остальных 20 человек нарисуем граф, в котором каждому человеку соответствуют своя вершина и номер от 1 до 20. Соединим рёбрами те и только те пары вершин, для которых тройка, из двух соответствующих этим вершинам людей и человека номер 0 вместе делали математику.

Покажем, что в этом графе либо найдется четверка вершин, попарно соединённых ребрами, либо четвёрка вершин, попарно не соединённых ребрами. Вершина номер 1 нашего графа либо соединена ребрами с 10 другими вершинами, либо не соединена ребрами с 10 другими вершинами. Без ограничения общности будем считать, что выполнено первое.

Рассмотрим подграф нашего графа, образованный этими 10 вершинами. Выберем произвольную вершину этого подграфа (пусть она имеет номер k). Она либо имеет общие рёбра с четырьмя другими вершинами подграфа (назовем их m, n, и q), либо не имеет общих ребер с 6 другими вершинами подграфа.

В первом из этих случаев либо четверка вершин с номерами m, n, p и q попарно не соединена ребрами, либо две из них, например m и n, соединены ребром — и тогда четвёрка вершин с номерами 1, k, m и n попарно соединена ребрами.

Во втором же из случаев мы получаем 6-вершинный подграф нашего (10-вершинного) подграфа в котором, как известно, всегда либо найдутся три попарно соединенных ребрами вершины a, b и c — и тогда четверка, вершин с номерами 1, a, b и c попарно соединена ребрами, либо три попарно не соединённые ребрами вершины a, b и c — и тогда четверка вершин с номерами k, , и c попарно не соединена ребрами.

Без ограничения общности будем считать, что нашлась четверка людей с номерами K, L, M и N четырёх вершин попарно соединённых ребрами. Либо среди соответствующих этим вершинам людей найдётся тройка, делавшая вместе математику — и тогда вместе с человеком номер 0 они образуют искомую четверку (делавшую по трое математику), либо такой тройки не найдётся — и тогда искомой является сама четвёрка людей с номерами K, L, M и N (делавшие по трое русский язык).