Решения комплекта вариантов V–1 — V–4.

Задача 1.

Ответ: $x = 1, y = 3$ и $x = 4, y = 6$.

Решение. Так как бесконечная десятичная дробь вида $0,xxx\ldots$ равна $\frac{x}{9}$, то равенство в условии равносильно соотношению

$$11x + \tfrac{x}{9} = (y + \tfrac{y}{9})^2 \iff 9x = y^2,$$

откуда и получается ответ.

Задача 2.

Ответ: $(0; \frac{1}{4}] \cup \{1\}$ (варианты V-1, V-2, V-4), $\{2^{-8/5}; 1\}$ (вариант V-3).

Решение (вариант V-1). Перепишем уравнение в виде

$$|\log_2 x + 2| - 2|\log_2 x + 1| = \log_2 x$$

и выполним замену $t = \log_2 x$. Решая получающееся уравнение $|t + 2| - 2|t + 1| = t$ методом интервалов, получим $t \in (-\infty; -2] \cup \{0\}$.

Задача 3.

Ответ: $\frac{72}{5}$.

Решение. По теореме о пересекающихся хордах: $AE \cdot EM = BE \cdot EC$. Но так как по условию $AE = EM$ и $BE = EC$, то $AE = BE = CE$, т.е. E – центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Значит, угол A – прямой.

Так как аналогично $AF \cdot FC = BF \cdot FN$ и по условию: $BF = 13x$, $FN = 4x$, то $AF = FC = 2\sqrt{13}x$. Следовательно, из прямоугольного треугольника ABF: $AB^2 = BF^2 - AF^2 = 9 \cdot 13x^2$, а из треугольника ABC: $9 \cdot 13x^2 + 16 \cdot 13x^2 = 36 \Rightarrow x = \frac{6}{5\sqrt{13}}$.

Поэтому периметр равен $7\sqrt{13}x + 6 = \frac{72}{5}$.

Задача 4.

Ответ: 7 корней.

Решение. 1) $\sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0 \iff x = \frac{\pi}{6}; -\pi$. Но так как $-\pi < -1$, то для корня $x = -\pi$ не определен $\arcsin x$ и только $x = \frac{\pi}{6}$ является корнем исходного уравнения.

2) $\sin(6 \arcsin x) = 0 \iff 6 \arcsin x = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Но так как $x \leqslant \frac{\pi}{6}$, то корнями исходного уравнения будут только следующие числа: $-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0$.

3) Рассмотрим уравнение $\frac{\sin x}{100} = 11 - 21x$. На промежутках $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$ оно не имеет решений, так как на первом из них: $\frac{\sin x}{100} < 1 < 11 - 21x$, а на втором: $\frac{\sin x}{100} > -1 > 11 - 21x$. На промежутке $(0; 1)$ уравнение имеет единственное решение x_0, так как здесь левая часть – возрастающая функция, правая часть – убывающая и, кроме того, при $x = 0$: $\frac{\sin x}{100} = 0 < 11 = 11 - 21x$, а при $x = \frac{\pi}{6}$: $\frac{\sin x}{100} = \frac{1}{200} > 11 - 3{,}5 \cdot 3{,}1415 > 11 - 3{,}5\pi = 11 - 21x$ (и соответственно получается, что $x_0 < \frac{\pi}{6}$).

Задача 5.

Ответ: $a = 2$, $b = 4$.

Решение. Необходимым условием существования такого разрезания является равенство площадей: $4a^2 + 3b^2 + 10ab = 144$. Отсюда получаем, что b четно и, так как $3b^2 < 144$, число b может быть равно 2, 4 или 6. При $b = 2$ имеем: $a(a + 5) = 33$ и a не целое. При $b = 4$ имеем: $a(a + 10) = 24 \Rightarrow a = 2$. При $b = 6$ имеем: $a(a + 15) = 9$ и a не целое. Таким образом, остается лишь проверить, что разрезание с параметрами $a = 2$, $b = 4$ в рассматриваемом квадрате возможно.