Решения комплекта вариантов IV–1 — IV–4.

Задача 1.

Ответ: πn, $n \in \mathbb{Z}$ (в вариантах IV-1 и IV-3) и $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (в вариантах IV-2 и IV-4).

Решение. Произведение аргументов логарифмов равно 1, поэтому один логарифм неотрицателен, в то время как другой – неположителен. Поэтому логарифмы совпадают лишь в том случае, когда оба аргумента равны 1. Таким образом, $\operatorname{tg} x = 0$ в вариантах IV-1 и IV-3 и $\operatorname{ctg} x = 0$ в вариантах IV-2 и IV-4.

Задача 2.

Ответ: $3\sqrt{3}$ (вариант IV-1), $27\sqrt{3}/4$ (вариант IV-2), $12\sqrt{3}$ (вариант IV-3), $75\sqrt{3}/4$ (вариант IV-4).

Решение. Точки M и N расположены на стороне AC в следующем порядке: A, N, M, C (иначе бы угол B был больше $180°$).

Пусть $AN = NM = MC = a$. Опустим из вершины B высоту BH. Положим $NH = x \Rightarrow DM = a - x$ (точка H лежит между N и M). Тогда из двух прямоугольных треугольников ABM и NBC выразим высоту: $BH^2 = (a + x)(a - x) = x(2a - x)$. Отсюда $x = a/2$ (т.е. треугольник ABC равнобедренный), высота BH равна $a\sqrt{3}/2$, и следовательно, площадь $\triangle ABC$ равна $3a^2\sqrt{3}/4$.

Задача 3.

Ответ: $\left(2 - \sqrt{6}, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{4-x} - \sqrt{x^2 - 5x + 2} > x^2 - 4x - 2,$$

после чего домножим и разделим левую часть на сопряженное выражение:

$$\frac{-(x^2 - 4x - 2)}{\sqrt{4-x} + \sqrt{x^2 - 5x + 2}} > x^2 - 4x - 2 \iff (x^2 - 4x - 2)\left(\sqrt{4-x} + \sqrt{x^2 - 5x + 2} + 1\right) < 0$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 4x - 2 < 0, \\ 4 - x \geqslant 0, \\ x^2 - 5x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \iff x \in \left(2 - \sqrt{6}, \tfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right].$$

Задача 4.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$.

Решение. Выполним замену переменных: $x - y + 1 = a$, $2y - x = t$. Тогда условие задачи переформулируется следующим образом: «Найдите множество значений a при условии $2|t| + t = a^2 - 4a - 12$».

На плоскости переменных (a, t) это условие задает множество, состоящее из частей парабол $t = \frac{1}{3}(a^2 - 4a - 12)$ и $t = -(a^2 - 4a - 12)$ для значений $a \in (-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$. Так как в полосе $-2 < a < 6$ точек множества нет, то указанные значения a и составляют ответ.

Задача 5.

Ответ: 60.

Решение. Так как треугольник со сторонами $3, 4, 5$ прямоугольный, то искомое число не может быть больше 60. Покажем, что произведение длин сторон любого пифагорова треугольника делится на 60, т.е. на 3, на 4 и на 5.

Остатками при делении квадрата целого числа на 3 и 4 могут быть только числа 0 и 1. Поэтому, если a и b не делятся на 3 и на 4, то $a^2 + b^2$ при делении и на 3, и на 4 дает остаток 2, и следовательно, не может быть полным квадратом.

Остатками при делении целого числа на 5 могут быть только числа 0, 1 и 4. Поэтому, если a и b не делятся на 5 и $a^2 + b^2$ является полным квадратом, то одно из чисел – a^2 или b^2 – имеет остаток 1, а другое – остаток 4. Следовательно, $a^2 + b^2$ делится на 5.