Решения комплекта вариантов I–1 — I–4.

Задача 1.

Ответ: первое число больше (во всех вариантах).

Решение. Сравним числа $\log_{k-1} k$ и $\log_k(k+1)$ для всех $k \geqslant 3$. Учтем, что в силу неравенства Коши: $\sqrt{\log_k(k-1)\cdot\log_k(k+1)} < 0,5\log_k(k^2-1) < 1$. Следовательно, $\log_k(k+1) < \log_{k-1} k$.

Задача 2.

Ответ: разность равна 21/8 или 2.

Решение. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 63$, $a_1 = 3d/2 \Rightarrow 0,5d(n+2)n = 63$.

После описанного в условии изменения эти числа снова будут образовывать арифметическую прогрессию с той же разностью d, но с другим первым членом, равным теперь d. Поэтому их сумма станет равна $0,5d(n+1)n$, и по условию выполнено неравенство $55 \leqslant 0,5d(n+1)n \leqslant 56$. Учитывая первое соотношение, получим

$$\frac{55}{63} \leqslant \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{56}{63} \iff \frac{47}{8} \leqslant n \leqslant 7.$$

Следовательно, $n = 6$ или $n = 7$, а разность d соответственно равна 21/8 или 2.

Задача 3.

Ответ: $1 + (\pi/4)$ (во всех вариантах).

Решение (для вариантов I–1 и I–2). Область допустимых значений неравенства определяется системой $\begin{cases} \arcsin x \geqslant 0, \\ \arccos y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$

Если $-1 \leqslant y \leqslant 0$, то $\arccos y \geqslant \frac{\pi}{2} \geqslant \arccos x$. Следовательно, весь квадрат $\{0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ площади 1 входит в множество решений.

На оставшемся множестве $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ справедливы неравенства $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \arccos y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, так как функция $\sin t$ возрастает при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, получим равносильные неравенства

$$\sin(\arcsin x) \leqslant \sin(\arccos y) \iff x \leqslant \sqrt{1-y^2} \iff x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Поэтому здесь решением будет четверть единичного круга, площадь которой равна $\frac{\pi}{4}$.

Задача 4.

Ответ: одна сторона равна 12, а другая равна либо $(5+\sqrt{501})/2$, либо $\sqrt{229}$.

Решение. Рассмотрим три возможных случая.

1) Углы A и C острые. Тогда $\angle C = 60^\circ$ и высота BH равна 12. Но в этом случае $CH = 6$ и основание H высоты не может лежать на стороне AC.

2) Угол A тупой, а угол C острый. Тогда $\angle C = 60^\circ$, $AB = 12$ и по теореме косинусов $144 = 25 + BC^2 - 5\cdot BC \Rightarrow BC = (5+\sqrt{501})/2$.

3) Угол A острый, а угол C тупой. Тогда $\angle C = 120^\circ$, $BC = 12$ и по теореме косинусов $AB^2 = 229$.

Задача 5.

Ответ: при $a = 7$.

Решение. В силу неравенства треугольника:

$$|y| + |y-x| + |x-1| \geqslant |y - (y-x) - (x-1)| = 1,$$

поэтому первое неравенство может иметь решения лишь тогда, когда $a \geqslant 1$. В этом случае оно равносильно системе неравенств

$$-\frac{a-1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{a+1}{2}, \quad -\frac{a-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a+1}{2}, \quad x - \frac{a+1}{2} \leqslant y \leqslant x + \frac{a-1}{2},$$

которая определяет на координатной плоскости шестиугольник, если $a > 1$, и треугольник, если $a = 1$.

Второе неравенство системы равносильно неравенству $(x-0,5)^2+(y-0,5)^2 \geqslant 49/2$ и потому определяет дополнение до всей плоскости внутренней части круга с центром $(1/2, 1/2)$ радиуса $7/\sqrt{2}$.

Если $a=1$, то система не имеет решений.

Так как при $a>1$ вершины $(-\frac{a-1}{2}, -\frac{a-1}{2})$ и $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ бóльшей диагонали шестиугольника являются наиболее удаленными от точки $(1/2, 1/2)$ среди всех точек шестиугольника, то в пересечении рассматриваемых множеств множеств будет ровно две точки тогда и только тогда, когда окружность второго множества проходит через эти вершины. Точка $(1/2, 1/2)$ является серединой бóльшей диагонали, а длина этой диагонали равна $a\sqrt{2}$. Следовательно, $a\sqrt{2}=14/\sqrt{2}$, т.е. $a=7$.