Олимпиада
«Покори Воробьевы горы — 2012»

9 класс

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

1. Пятизначное число назовем *пэвэгэшным*, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее число пэвэгэшных пятизначных чисел может идти подряд?

2. Существуют ли такие 10 различных натуральных чисел, что сумма этих десяти чисел равна произведению двух наибольших?

3. Партия бильярда состоялась на столе в форме прямоугольника 398×472 см и с 4 лузами по углам. Некто ударил по шару, который стоял прямо у лузы, под углом $45°$ в направлении от неё. Через сколько отражений от бортов шар попал в лузу? (Трением пренебречь.)

4. Решите в действительных числах уравнение $x^3 - \lfloor x \rfloor = 6$. ($\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа t, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее t. Например, $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$, $\lfloor -\sqrt{3} \rfloor = -2$.)

5. 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найдите все возможные значения n, меньшие 199.

6. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди её соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет?

7. В прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) вписан квадрат $CDEF$ так, что его вершина D лежит на стороне CA треугольника, вершина E — на стороне AB, а вершина F — на стороне BC. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники EDA и EFB, равны r_1 и r_2 соответственно. Найдите сторону квадрата.

8. Найдите (с доказательством) какое-либо натуральное m, меньшее 2011, такое что числа $1^m, 2^m, \ldots, 2010^m$ можно расставить по кругу так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих делилась на 2011.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a|x^4 - 3x^2 + 2| + c^2 = c(a|x^2 - 1| + |x^2 - 2|)$$

ни при каком значении c не имеет ровно 7 корней.