

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!»

Вариант С-11

1. Пятая часть персонала фирмы работает в транспортном отделе, ещё 52 сотрудника — в отделе продаж, остальные — в нескольких цехах, в каждом из которых работает $1/7$ персонала фирмы. Чему равна общая численность персонала?

2. Решите неравенство

$$2 \arcsin(x + 1) + \arcsin(4x^2 + 8x + 4) < 0.$$

3. В треугольнике PVG на стороне VG выбрана точка D так, что $PD = PV$. Точка F симметрична точке D относительно прямой PG . Найдите VF , если синус угла PGV равен $\frac{2}{5}$, а $PV = 5\sqrt{3}$.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых графики функций

$$f(x) = 3^{2x^2 - 4x + 3} + a^3 \text{ и } g(x) = a \cdot 3^{x^2 - 2x + 3} - 5$$

имеют ровно три общие точки.

5. Высота правильной треугольной пирамиды, проведённая из вершины основания к противоположной боковой грани, равна 4. Какие значения может принимать площадь полной поверхности такой пирамиды?

март 2012 г.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!»

Вариант С-12

1. Треть сотрудников компании работает в финансовом отделе, ещё 35 сотрудников — в отделе маркетинга, а остальные — в нескольких цехах, в каждом из которых работает $1/7$ от общего числа сотрудников компании. Сколько всего сотрудников работает в этой компании?

2. Решите неравенство

$$\arcsin(6x^2 - 12x + 6) + 2 \arcsin(x - 1) < 0.$$

3. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $AD = AB$. Точка F симметрична точке D относительно прямой AC . Найдите BF , если $AB = 4$, а синус угла ACB равен $\frac{3}{8}$.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых графики функций

$$f(x) = a \cdot 4^{x^2 - 4x + 6} - 11 \text{ и } g(x) = 4^{2x^2 - 8x + 9} + a^3$$

имеют ровно три общие точки.

5. Какие значения может принимать площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если вершина основания этой пирамиды находится на расстоянии 5 от противоположной боковой грани?

март 2012 г.

1. Лаборатория Альфа на покупку пяти микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 140 тыс. руб. Лаборатория Бета на покупку шести микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 167 тыс. руб. Сколько потратит лаборатория Гамма на покупку трёх микроскопов, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковы?

2. Решите неравенство

$$\arccos(4x^2 - 8x + 3) + 2\arcsin(x - 1) < 0.$$

3. Координаты точки удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 4$. На каком расстоянии от плоскости $z = -3$ может лежать эта точка, если известно, что расстояние от этой точки до начала координат равно двум?

4. Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left| 5x^2 + 6x - \frac{2}{x} \right| + \left| 3x^2 - 2\sqrt{x} - 9 - \frac{5}{x} \right| \text{ и } g(x) = 2x^2 + 2\sqrt{x} + 21 - \frac{3}{x}.$$

5. Последовательность выпуклых четырёхугольников $P_1Q_1R_1S_1, P_2Q_2R_2S_2, \dots, P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$ такова, что вершины четырёхугольника $P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1}S_{n+1}$ являются серединами сторон четырёхугольника $P_nQ_nR_nS_n$ ($n = 1, 2, \dots, 2011$). (а) Может ли отношение периметров четырёхугольников $P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$ и $P_1Q_1R_1S_1$ равняться $32 \cdot 10^{-303}$? (б) Найдите все возможные значения этого отношения.

март 2012 г.

1. На путь в гору по маршруту A турист затратил 2 часа, а на путь с горы по маршруту B , который на 18 км длиннее маршрута A , — 4 часа. Найдите общую длину пути, пройденного туристом, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем при подъёме.

2. В окружности диаметр AB и хорда PQ пересекаются в точке C под прямым углом. Найдите длину биссектрис треугольника APQ , если $PC = 5$, $AC : CB = 8$.

3. Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2\sin x + 3\cos x| + |\sin x - 3\cos x| \leq 3\sin x$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

4. Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \text{ и } y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

5. Найдите все положительные значения параметра a , при которых среди чисел последовательности

$$x_n = -n^2 + 10n + 22 + \frac{10}{|5n - 31| + a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

есть ровно два максимальных элемента.

март 2012 г.

1. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^{1006} - (x^{2012} + 1)} > 3x^{1799} + 1.$$

2. В равнобедренном треугольнике ABC высота AH в два раза короче высоты BO . Найдите синус угла между прямыми AH и BO .

3. Вася возвёл какое-то целое число в куб и умножил результат на два. Петя возвёл другое целое число в квадрат и умножил результат на три. Оказалось, что ответы совпали. Какое число взял каждый из ребят, если эти числа отличаются не более чем на 100 (перечислите все возможные варианты)?

4. Найдите максимально возможное отношение объёма конуса к объёму шара, содержащего этот конус.

5. Решите уравнение

$$|1 - x - y - xy| + |2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2xy - 9| + \frac{|xy|}{xy} = -1.$$

март 2012 г.

1. Лошадь съедает 1 ц корма за 8 дней, осёл — за 12, а верблюд — за 6. На сколько дней хватит 85 ц корма 7 лошадям, 5 ослам и 5 верблюдам.

2. Найдите сумму общих членов прогрессий 12, 15, 18, ... и 1, 3, 9, ..., если в каждой из них 100 членов.

3. Окружность радиуса 2 проходит через вершину B треугольника ABC , через середину стороны AB и через середину отрезка BP , где P — точка пересечения биссектрисы угла ABC и серединного перпендикуляра к стороне AC . Найдите длину AC , если известно, что $PC = 2\sqrt{3}$.

4. Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

5. Радиус сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, равен R . Найдите величину двугранного угла при боковом ребре этой пирамиды, при которой максимален объём другой пирамиды, вершинами которой служат центр вписанной в исходную пирамиду сферы и точки касания этой сферы с боковыми гранями исходной пирамиды.

март 2012 г.

1. Лаборатория Альфа на покупку четырёх микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 112 тыс. руб. Лаборатория Бета на покупку трёх микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 92 тыс. руб. Сколько потратит лаборатория Гамма на покупку микроскопа, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковы?

2. Решите неравенство

$$2 \arcsin(x+1) + \arccos(3x^2 + 6x + 2) < 0.$$

3. Координаты x, y, z точки, лежащей на сфере с центром в начале координат и радиусом 3, удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 9$. На каком расстоянии от плоскости $z = -4$ может лежать эта точка?

4. Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left| 4x^2 + 4x + 4\sqrt{x} - \frac{3}{x} \right| + \left| 3x^2 + \frac{1}{x} - 8 \right| \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 16.$$

5. Последовательность выпуклых четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2, \dots, A_{2012}B_{2012}C_{2012}D_{2012}$ такова, что вершины четырёхугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ являются серединами сторон четырёхугольника $A_nB_nC_nD_n$ ($n = 1, 2, \dots, 2011$). (а) Может ли отношение периметров четырёхугольников $A_1B_1C_1D_1$ и $A_{2012}B_{2012}C_{2012}D_{2012}$ равняться $3 \cdot 10^{301}$? (б) Найдите все возможные значения этого отношения.

март 2012 г.

1. Рассеянный Вася на полпути от школы до дома обнаружил, что оставил в школе портфель. В этот момент он встретил двух друзей. Первый был на мотоцикле и мог отвезти Васю до школы, но тогда бы домой Васе нужно было идти пешком. Второй был на велосипеде и мог отвезти Васю до школы и обратно до самого дома, но прежде, чем посадить пассажира на велосипед, ему нужно было подкачать колёса. За время подкачки колёс мотоциклист как раз доедет до школы. С кем из друзей поехать Васе, чтобы взять портфель и как можно быстрее попасть домой, если он проходит половину пути от школы до дома за то же время, за которое велосипедист проезжает $\frac{7}{9}$ этого пути?

2. Решите неравенство

$$\left| |2 + x - x^2| - |x + 1| \right| \geq |x^2 - 2x - 3|.$$

3. В четырёхугольнике $ABCD$ угол A равен 88° , угол B равен 122° , $CD = 2$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKD , где K — точка пересечения биссектрис углов C и D , и сравните этот радиус с 1,04.

4. Решите уравнение

$$\frac{27x - 24}{2x + \sqrt{4x^2 - 3}} - \frac{36x - 32}{\sqrt{4x^2 - 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = 9x^2 - 26x + 16.$$

5. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2012}$ — арифметическая прогрессия с разностью d , причём $\cos \alpha_k \neq 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, 2012$ и

$$\frac{1}{\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2} + \frac{1}{\cos \alpha_2 \cdot \cos \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\cos \alpha_{2011} \cdot \cos \alpha_{2012}} = 0.$$

Найдите все возможные значения d , не превосходящие по модулю π .

март 2012 г.

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!»

Вариант Z-01

1. В школе было три урока. Но только 4 школьника были на всех уроках. Каждый из остальных “учеников” присутствовал только на двух уроках, а один из уроков прогулял. На математике в классе было 17 школьников, на физике — 18, на русском — 19. Сколько школьников присутствовало и на математике, и на физике (не имеет значения, удостоили ли они своим посещением урок русского языка)?
2. В желобе, имеющем форму двугранного угла величины $2 \arcsin \frac{1}{3}$, неподвижно лежит шар радиуса 3, касаясь при этом обеих граней. Другой шар скользит вдоль желоба, также постоянно касаясь каждой из граней, и проскальзывает мимо неподвижно лежащего шара, не сталкиваясь с ним и даже не касаясь его. Найдите все возможные значения радиуса скользящего шара.
3. Решите уравнение $x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}$.
4. Окружность, проходящая через вершины A и B квадрата $ABCD$, пересекает прямые AD и AC в точках E и F , отличных от точки A . Длина ортогональной проекции отрезка EF на прямую AC равна 1. Какой при этих условиях может быть длина стороны квадрата?
5. Решите систему

$$\begin{cases} 4 \cos^2 x + \cos^2 5y = 4 \cos x \cdot \cos^6 5y, \\ \lg(x - y)^2 < 2 \lg(2\pi) - \lg 5 - \lg 45. \end{cases}$$

март 2012 г.