Заключительный этап олимпиады «Покори Воробьевы горы» 2011/2012 учебный год 7–9 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	Ответ	Балл
№1		
№2		
№3		
№4		
№5 (а)		
№5 (б)		
№6		
№7 (а)		
№7 (б)		
№8 (а)		
№8 (б)		
№8 (в)		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

1. После того, как пешеход прошёл половину пути и 1 км, ему осталось пройти 1/3 пути и 1 км. Чему равен весь путь?

2. Водитель машины заметил, что одометр (счётчик пройденного расстояния) показывает симметричное число (т.е. число, которое одинаково читается слева направо и справа налево) 15951. Ровно через час одометр показал другое симметричное число. С какой скоростью ехала машина, если в течение всего этого часа она ехала с постоянной скоростью?

3. Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая единицы и самого этого числа, ровно 2199 различных делителей.

4. Квадратное табло состоит из 2012×2012 ячеек, каждая из которых может светиться или быть погашена. Известно, что можно переключать состояние на противоположное одновременно для всех ячеек на любой горизонтали, на любой вертикали и на любой (не обязательно большой) диагонали. Гарантированно ли (независимо от того, какие ячейки в начальный момент светились, а какие были погашены) такими переключениями можно привести табло в состояние, когда все ячейки погашены?

5. Нано-лягушка, перемещаясь по плоскости, может делать два вида действий: прыгать в направлении взгляда ровно на 1 метр и изменять направление взгляда на угол, кратный 45 градусам. (а) Докажите, что таким образом нано-лягушка может приблизиться к любой точке плоскости на расстояние, не превосходящее 1 нанометра. (б) Может ли нано-лягушка, перемещаясь таким образом, удалиться от точки, в которой она изначально находилась, ровно на 2,5 метра?

6. Треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $\ldots$, $A_{2012}B_{2012}C_{2012}$ таковы, что вершинами треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ являются точки касания сторон треугольника $A_nB_nC_n$ и вписанной в этот треугольник окружности ($n = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 2011$). Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что наибольший угол этого треугольника равен одному из углов треугольника $A_{2012}B_{2012}C_{2012}$.

7. Петя и Коля играют в такую игру. Петя загадывает натуральное число от 1 до 2012. Коля называет натуральные числа, и после каждого названного числа Петя говорит «недобор», если названное число меньше загаданного, и «перебор», если названное число больше загаданного. Если же названное число совпадает с загаданным, то Петя говорит «угадал», и игра заканчивается победой Коли. При этом если в процессе отгадывания дважды возник «перебор», то игра заканчивается победой Пети. (а) Сможет ли Коля гарантированно выиграть, назвав не более 100 чисел? (б) Найдите наименьшее число N такое, что Коля гарантированно сможет выиграть, назвав не более N натуральных чисел.

8. Можно ли сложить прямоугольный лист бумаги, согнув его несколько раз, и сделать один прямолинейный разрез так, что после разворачивания отрезанная часть превратится (а) в правильный треугольник; (б) в равнобедренный треугольник с заданным углом при основании; (в) в треугольник с заданными углами?