Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!»
2011/2012 учебный год, математика, 10–11 классы
Ответы заданий заключительного тура

Вариант C-11 (Томск)
1. 140.
2. $\left(-\frac{5+\sqrt{5}}{5}, -1\right)$.
3. $6\sqrt{7}$.
4. 1, $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.
5. $\left[\frac{64\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Вариант C-12 (Томск)
1. 147.
2. $\left(\frac{10-\sqrt{10}}{10}, 1\right)$.
3. $\sqrt{55}$.
4. 1, $\frac{-1+\sqrt{61}}{2}$.
5. $\left[\frac{100\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Вариант H-11 (Москва)
1. 86 тысяч.
2. $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$.
3. $\frac{9\pm 2\sqrt{3}}{3}$.
4. $(1, 22)$.
5. а) нет; б) $(2^{-1006}, 2^{-1005})$.

Вариант P-04 (Брянск)
1. 30 км.
2. $10\sqrt{2}$, $4\sqrt{6}$, $4\sqrt{6}$.
3. $2\operatorname{arctg}\frac{9}{7}$.
4. $\frac{1}{2-\sqrt[3]{7}} = 4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}$.
5. 4.

Вариант R-05 (Ростов)
1. -1.
2. $\frac{\sqrt{15}}{4}$.
3. $(6, 12)$, $(6, -12)$, $(24, 96)$.
4. $\frac{8}{27}$.
5. $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.

Вариант S-03 (Екатеринбург)
1. 40.
2. 351.
3. $\sqrt{39}$.
4. $1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.
5. 90°.

Вариант U-06 (Москва)
1. 52 тысячи.
2. $\left[-\frac{3+\sqrt{6}}{3}, -\frac{5+\sqrt{10}}{5}\right)$.
3. $4 \pm \sqrt{3}$.
4. $(1, 13)$.
5. а) нет; б) $(2^{1005}, 2^{1006})$.

Вариант Y-02 (Екатеринбург)
1. Быстрее на велосипеде.
2. $\{-1\} \cup [2, +\infty)$.
3. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$, радиус меньше $1,04$.
4. $\frac{8}{9}$, $\frac{2+\sqrt{13}}{3}$.
5. $\frac{\pi n}{2011}$, $n \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2010\}$.

Вариант Z-01 (Уфа)
1. 10.
2. $\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup (6, +\infty)$.
3. 1.
4. $\sqrt{2}$.
5. $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{5} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1. Н-11. Пусть x — стоимость микроскопа, y — стоимость телескопа, z — стоимость эпидиаскопа, тогда $5x+4y+z=140$, $6x+5y+z=167$. Вычтя из утроенного первого равенства удвоенное второе, получаем, что $3x+2y+z=86$. **Ответ: 86 тысяч рублей.**

U-06. $4x+5y+z=112$, $3x+4y+z=92$. Из утроенного второго вычитаем удвоенное первое, получаем: $x+2y+z=52$. **Ответ: 52 тысячи рублей.**

Критерии.
Арифментическа ошибка — не более $\pm$.
Рассмотрен частный случай — не более $\mp$.

2. Н-11. Делаем замену $t=x-1$, переносим arcsin: $\arccos(4t^2-1)<-2\arcsin t$. Положительныен t, принадлежащие одз, неравенству не удовлетворяют (слева неотрицательная величина, справа отрицательная). При неположительных t, принадлежащих одз, обе части лежат в отрезке $[0;\pi]$, где cos убывает, откуда, с учетом ограничения на одз, получаем: $1-2t^2<4t^2-1\leqslant 1$, значит, $|t|\in(1/\sqrt{3},1/\sqrt{2}]$. Остается вспомнить про неположительность t и вернуться к x. **Ответ:** $[1-\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{3}})=[\frac{2-\sqrt{2}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{3})$.

U-06. Делаем замену $t=x+1$, переносим $2\arcsin t$: $\arccos(3t^2-1)<-2\arcsin t$. При положительных t, принадлежащих одз, неравенство неверно (слева неотрицательное число, справа — отрицательное). При неположительных t, принадлежащих одз, обе части лежат в отрезке $[0;\pi]$, где cos убывает. Соответственно, неравенство на множестве неположительных t, с учетом ограничений на одз, имеет вид $1-2t^2<3t^2-1\leqslant 1$, т.е. $2/5<t^2\leqslant 2/3$. В итоге получаем: $t\in[-\sqrt{2/3};-\sqrt{2/5})$. **Ответ:** $[-1-\sqrt{2/3};-1-\sqrt{2/5})=[-\frac{3+\sqrt{6}}{3};-\frac{5+\sqrt{10}}{5})$.

Критерии.
Неверное включение/исключение граничных точек — не более $\pm$.
Арифметическая ошибка — не более $\pm$.
Недостаточное обоснование — не более $\pm$.
Неверные переходы — не более $\mp$.

3. Н-11. Выписываем систему $x^2+y^2+z^2=4$, $xy+yz+zx=4$, вычитаем из первого второе и удваиваем: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, откуда $x=y=z=\pm\sqrt{4/3}$. **Ответ:** $3\pm\sqrt{4/3}=\frac{9\pm2\sqrt{3}}{3}$.

U-06. Выписываем систему $x^2+y^2+z^2=9$, $xy+yz+zc=9$, вычитаем второе из первого и удваиваем. Получаем, что $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, откуда $x=y=z=\pm\sqrt{3}$. **Ответ:** $4\pm\sqrt{3}$.

Критерии.
Верно найдены обе точки — не менее $\pm$.
Арифметическая ошибка — не более $\pm$.
Потеря одной точки — не более $\pm$.

4. Н-11. Из областей определения сразу следует, что можно ограничиться положительными x. Так как $|a|+|b|\geqslant a-b$, $f(x)-g(x)\geqslant 6(x+1/x-2)$, что больше нуля при отличных от 1 положительных значениях x. Остается проверить $x=1$ непосредственной подстановкой. **Ответ: (1, 22).**

U-06. Из областей определения сразу следует, что можно ограничиться положительными x. Так как $|a|+|b|\geqslant a-b$, $f(x)-g(x)\geqslant 4x+4/x-8=4(x+1/x-2)$, что больше нуля при отличных от 1 положительных значениях x. Остается проверить $x=1$ непосредственной подстановкой. **Ответ: (1, 13).**

Критерии.
Верная идея — не менее $\pm$.
Мелкая арифметическая ошибка — + (с точкой).
Не найдена ордината — + (с точкой).
После осуществления переходов к следствию нет проверки для $x=1$ — не более $\pm$.

5. U-06. В качестве первого выступает произвольный выпуклый четырехугольник (сумму длин его диагоналей обозначим через d, а периметр через p_1), оставшиеся будут параллелограммами, причем параллелограммы с номерами одинаковой четности будут подобны: при увеличении индекса на два линейные размеры уменьшаются вдвое. Периметр второго четырехугольника p_2 равен d. Соответственно, периметр 2012-го четырехугольника p_{2012} равен $d2^{-1005}$. Отношение p_1/d может принимать значения лишь из интервала $(1;2)$: за этот интервал вылезти нельзя (если сложить неравенства треугольника для четырех маленьких треугольников, на которые диагонали делят четырехугольник, то получим, что $2d > p_1$; если сложить неравенства треугольника для двух треугольников, на которые делит четырехугольник одна диагональ, с двумя аналогичными неравенствами, связанными с другой диагональю, получим, что $2p_1 > 2d_1$); все значения из этого интервала принимаются (например, от 1 до $\sqrt{2}$ — на прямоугольниках (вытянутые — около 1, квадрат — $\sqrt{2}$), от $\sqrt{2}$ до 2 — на ромбах (квадрат — $\sqrt{2}$, вытянутый — около 2)). Соответственно, множество всех возможных значений отношения p_1/p_{2012} — интервал $(2^{1005}; 2^{1006})$. Остается показать, что $3 \cdot 10^{301} < 2^{1005}$. Это верно, так как $30 < 2^5$, $10^300 < (2^10)^100$. **Ответ: а) нет; б)** $(2^{1005}; 2^{1006})$**.**

Н-11. Аналогично. **Ответ: а) нет; б)** $(2^{-1006}; 2^{-1005})$**.**

Критерии а.

Рассмотрен частный случай — не более $\mp$.

Недостоточное обоснование — не более $\pm$.

Критерии б.

Рассмотрен частный случай — не более $\mp$.

Нет верхней оценки — не более $\pm$.

Нет нижней оценки — не более $\pm$.

Нет обоснования реализуемости — не более $\pm$.

Неважная арифметическая ошибка — возможен + (с точкой).

Решение варианта $P-04$

1. **Ответ:** 30 **км.**

   Пусть x км — длина маршрута A, v_1 км/ч — скорость пешехода при подъёме, v_2 км/ч — скорость пешехода при спуске. Тогда $\dfrac{1}{v_2}=\dfrac{1}{v_1}-\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{x}{v_1}=3 \Rightarrow (x+18)(6-\frac{x}{2})=24\cdot\frac{x}{2} \Rightarrow x=-36$ или $x=6$. Весь путь равен $2x+18=30$.

2. **Ответ:** $10\sqrt{2}$**,** $4\sqrt{6}$**,** $4\sqrt{6}$**.**

   Обозначим $BC=x$, тогда $AC=8x$ и из $\triangle APB$ получаем, что $8x^2=25 \Rightarrow x=\dfrac{5}{\sqrt{8}}$. Поскольку $\triangle APQ$ равнобедренный, то AC — биссектриса угла A и $AC=10\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $AB=\sqrt{25+25\cdot 8}=15$. Пусть биссектриса угла APQ пересекает AQ в точке S. Так как $PQ=10$, то по свойству биссектрисы получаем: $AS=9$, $SQ=6$. $\cos\angle CAP=\dfrac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow$ $\cos\angle QAP=2\dfrac{8}{9}-1=\dfrac{7}{9}$. Из $\triangle PAS$ по теореме косинусов получаем, что $PS^2=225+81-2\cdot15\cdot9\cdot\dfrac{7}{9}=96$ $\Rightarrow PS=4\sqrt{6}$.

3. **Ответ:** $2\operatorname{arctg}\dfrac{9}{7}$.

   Обозначим через $s=\sin x$, $c=\cos x$. Поскольку $0\leqslant|2s+3c|+|s-3c|\leqslant(2s+3c)+(s-3c)=3s$, то на плоскости (c,s) решение неравенства представляет собой дугу единичной окружности, находящуюся в верхней полуплоскости между прямыми $s=-\dfrac{3}{2}c$, $s=3c$. Длина этой дуги равна $\alpha:=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}-\operatorname{arctg}3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{9}{7} \Leftrightarrow \alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{9}{7}$. С учётом того, что решение надо искать на промежутке $[0,4\pi]$, указанную дугу надо посчитать два раза.

4. **Ответ:** $\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$**.**

   Количество общих точек указанных графиков совпадает с количеством решений уравнения $x^3+6x=12x^2+1 \Leftrightarrow (2x-1)^3=7x^3 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$.

5. **Ответ:** $a=4$**.**

   Рассмотрим функции $f(x)=-x^2+10x-22$ и $g(x)=\dfrac{10}{|5x-31|+a}$. Функция f возрастает а промежутке $(-\infty;5)$ и убывает на промежутке $(5;+\infty)$, а функция g при всех значениях параметра a возрастает на промежутке $(-\infty;6\dfrac{1}{5})$ и убывает на промежутке $(6\dfrac{1}{5};+\infty)$ (при этом $f(6\dfrac{1}{5}+x)\equiv f(6\dfrac{1}{5}-x)$).

   Следовательно, максимальными членами последовательности могут быть $x_5=3+\dfrac{10}{6+a}$ и $x_6=2+\dfrac{10}{1+a}$. Так как последовательность имеет два максимальных члена, получаем равенство $3+\dfrac{10}{6+a}=2+\dfrac{10}{1+a} \Rightarrow a^2+7a-44=0 \Rightarrow a=-11$ или $a=4$.

Решение варианта $R-05$

1. **Ответ:** -1**.**

$$\sqrt{2x^{1006}-(x^{2012}+1)}>3x^{1799}+1 \Leftrightarrow \sqrt{-(x^{1006}-1)^2}>3x^{1799}+1.$$

Область определения неравенства состоит из двух чисел: $x=\pm1$. При $x=1$ неравенство не выполнено, при $x=-1$ — выполнено.

2. **Ответ:** $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$**.**

Поскольку высоты, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны, то одна из высот проведена к основанию, а другая — к высоте. Если высота AH проведена к основанию $\triangle ABC$, то из формул для площади для $\triangle ABC$ получаем, что $2S_{ABC}=AH\cdot BC=BO\cdot AC$ $\Rightarrow BC=2AC$, что противоречит неравенству треугольника. Следовательно, AH — высота, проведённая к боковой стороне BC. Тогда $AH\cdot BC=BO\cdot AC \Rightarrow BC=2AC$. Так как угол между прямыми AH и BO равен углу $\angle ACB$ между AC и BC. $\cos\angle ACB=\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{\frac{1}{2}AC}{BC}=\dfrac{1}{4}$, откуда $\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

3. **Ответ:** $(6,12)$**,** $(6,-12)$**,** $(24,96)$**.**

Пусть Вася проводил операции с числом x, а Петя — с числом y. Тогда $\begin{cases}2x^3=3y^2,\\ |x-y|\leqslant 100.\end{cases}$ Из уравнения системы следует, что $x=3a$, $y=2b$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Подставив, получим $54a^3=12b^2\Leftrightarrow 9a^3=2b^2$, следовательно, $a=2k$, $b=3l$, $k,l\in\mathbb{Z}$, откуда $4k^3=l^2$. Из этого уравнения следует, что $k=u^2$, $l=2v$, $u,v\in\mathbb{Z}$, т.е. $u^3=\pm v$. Неравенство системы в переменных k и l примет вид $|6k-6l|\leqslant 100$, что с учётом целочисленности k и l даёт $|k-l|\leqslant 16$ или $|u^2-2v|\leqslant 16$. Из неравенства $|u^2\pm 2u^3|\leqslant 16$ с учётом того, что $|1\pm 2u|\in\mathbb{Z}$ и $|1\pm 2u|\neq 0$, следует, что $|u|^2\leqslant 4\Rightarrow |u|\leqslant 2$. Из уравнения системы следует, что $x\geqslant 0$, а значит и $u\geqslant 0$. Поскольку x и y — различны, то u не равно нулю (иначе и v равно нулю). $x=6u^2$, $y=12v$. Остаются пары: $u=1, v=\pm1\Leftrightarrow (x,y)=(6,\pm12)$; $\quad u=2,\ v=\pm8\Leftrightarrow (x,y)=(24,\pm96)$. Неравенству системы удовлетворяют пары $(x,y)=(6,12)$, $(x,y)=(6,-12)$, $(x,y)=(24,96)$.

4. **Ответ:** $\dfrac{8}{27}$**.**

Пусть R — радиус шара. Тогда объём шара равен $V_{\text{шар}}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$. Максимально возможное отношение объёма конуса к объёму содержащего его шара может быть, если конус вписан в шар. Объём конуса, вписанного в шар, равен $V_{\text{кон}}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h$, где основания есть круг радиуса $r=\sqrt{R^2-x^2}$, x — расстояние от центра шара до основания конуса. Таким образом объём конуса равен $V_{\text{кон}}=\dfrac{\pi}{3}(R^2-x^2)(R+x)=\dfrac{\pi}{3}(R^3+R^2x-Rx^2-x^3)$.

Отношение объёма вписанного конуса к объёму шара $\dfrac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шар}}}=\dfrac{R^3+R^2x-Rx^2-x^3}{4R^3}$ принимает наибольшее значение, если функция $f(x)=R^3+R^2x-Rx^2-x^3$ принимает наибольшее значение. Поскольку $f'(x)=R^2-2Rx-3x^3=0\Leftrightarrow x\in\{\dfrac{R}{3},-R\}$, $\dfrac{R}{3}$ — точка максимума, то при $x=\dfrac{R}{3}$ получаем, что $\dfrac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{шар}}}=\dfrac{8}{27}$.

5. **Ответ:** $\left(-\frac{1}{2},3\right)$**,** $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$**.**

Если $xy > 0$, то $\dfrac{|xy|}{xy} = 1$ и левая часть неравенства не меньше 1, а правая часть неравенства отрицательна. Если $xy < 0$, то $\dfrac{|xy|}{xy} = -1$ и уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - x - y - xy = 0, \\ 2x^2y^2 - 2x^2y - 2xy^2 + 2xy - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - xy, \\ 2xy(xy - x - y + 1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - xy = 0, \\ 4(xy)^2 = 9. \end{cases}$$

При $xy < 0$ эта система равносильна системе $\begin{cases} xy = -\dfrac{3}{2}, \\ x + y = \dfrac{5}{2}, \end{cases}$ которое имеет решения $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$.