«Покори Воробьевы горы – 2011»

Математика 9-10 классы

Заочный тур, условия, ответы и решения

1. Морская вода содержит 5% соли (по массе). Сколько чистой воды нужно добавить в 30кг морской воды, чтобы содержание соли стало равным 1,5%?

ОТВЕТ. 70 кг чистой воды.

РЕШЕНИЕ. В 30кг морской соли имеется $0,05 \cdot 30 = 1,5$кг соли. Столько соли содержится в 100кг полуторапроцентного раствора. Значит, следует добавить 70 килограммов.

2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 2 = 0 \\ y^2 + 4z + 3 = 0 \\ z^2 + 4x + 4 = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ. Нет решений.

РЕШЕНИЕ. Сложив все три уравнения, получим $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = 0$. Это возможно, только если $x = -2$, $y = 1$, $z = -2$. Однако эти значения не удовлетворяют первым двум уравнениям.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = p$ и $CD = q$ окружности, вписанные в треугольники ACD и ACB, касаются друг друга. Чему равно AD?

ОТВЕТ. $AD = (p + q)/2$.

РЕШЕНИЕ. Пусть $AD = BC = x$, $AC = d$, M – общая точка прямой AD и окружностей, вписанных в треугольники ACD и ACB.

С одной стороны, $AM = (x + d - q)/2$; с другой стороны, $AM = (p + d - x)/2$. Приравнивая, получаем $x = (p + q)/2$.

4. Найдите наибольшее значение выражения

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2010} - x_{2011}| + |x_{2011} - x_1|$$

при $x_1, \ldots, x_{2011} \in [0; 1]$.

ОТВЕТ. Наибольшее значение равно 2010.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что если числа a, b, c расположены в порядке возрастания или убывания, сумма $|a-b|+|b-c|$ равна $|a-c|$. Расположим числа x_1, x_2, ..., x_{2011} по кругу. Всего промежутков между числами будет 2011 (нечетное число!), а значит, промежутки возрастания не могут чередоваться с промежутками убывания. Следовательно, для какого-то j будет $x_{j-1} < x_j < x_{j+1}$ или $x_{j-1} > x_j > x_{j+1}$ ($x_{2012} = x_1$, $x_0 = x_{2011}$). Уберем x_j из списка переменных, заменив сумму $|x_{j-1} - x_j| + |x_j - x_{j+1}|$ на $|x_{j-1} - x_{j+1}|$.

Останется 2010 слагаемых, каждое из которых не превосходит 1. В то же время все могут быть равны единице, если среди оставшихся 2010 переменных чередуются значения 0 и 1.

5. По шоссе в одну сторону с постоянными скоростями движутся автомобиль и мотоциклист, а навстречу им с постоянной скоростью идет пешеход. Когда автомобиль и мотоциклист были в одной точке, до пешехода было 30км. Когда автомобиль и пешеход встретились, мотоциклист отстал от автомобиля на 5км. На сколько километров обогнал автомобиль мотоциклиста на момент встречи мотоциклиста и пешехода?

ОТВЕТ. На 6 километров.

РЕШЕНИЕ. Будем считать, что пешеход неподвижен, измеряя все скорости относительно него. Пусть скорость автомобиля v_a, а мотоциклиста v_m. Пусть время от встречи автомобиля и мотоцикла до встречи автомобиля и пешехода (первый промежуток времени в задаче) равно t_1; тогда $v_a t_1 = 30$, $v_m t_1 = 25$. Пусть время от встречи автомобиля и пешехода до встречи мотоциклиста и пешехода равно t_2; тогда $v_m t_2 = 5$, $v_a t_2 = x$, где x – искомое расстояние. Отсюда легко найти, что $x = 6$.

6. Пусть $\frac{m}{n}$ — положительная несократимая дробь, и известно, что дробь $\frac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сократима?

ОТВЕТ. На 7.

РЕШЕНИЕ. Пусть $a = 4m + 3n$, $b = 5m + 2n$, и пусть d — общий натуральный делитель a и b. Заметим, что тогда d делит $5a - 4b = 7n$ и $3b - 2a = 7m$. Поскольку m и n взаимно просты, d должно быть делителем 7. В то же время, при $m = n = 1$ получаем дробь $a/b = 7/7$, которая сократима на 7.

7. Решите уравнение $\sqrt[3]{15x + 1 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 4$.

ОТВЕТ. $x = 0; 2; 13; 15$.

РЕШЕНИЕ. Первая стандартная замена: $u = \sqrt[3]{15x + 1 - x^2}$, $v = \sqrt[3]{x^2 - 15x + 27}$ приводит к системе уравнений $u + v = 4$, $u^3 + v^3 = 28$. Вторая стандартная замена: $a = uv$, $b = u + v$ приводит к решению $a = 3$, $b = 4$. Отсюда получаем $u = 1, v = 3$ (или $u = 3, v = 1$). Решая уравнения $\sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 1$ и $\sqrt[3]{x^2 - 15x + 27} = 3$, получаем 4 значения x.

8. Дан правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ со стороной a. Каково наименьшее возможное значение суммы расстояний $A_1M + A_2M + A_3M + A_4M + A_5M + A_6M$ от произвольной точки плоскости M до вершин этого шестиугольника?

ОТВЕТ. $\min(A_1M + A_2M + A_3M + A_4M + A_5M + A_6M) = 6a$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что $A_1M + A_4M \geqslant A_1A_4 = 2a$, $A_2M + A_5M \geqslant 2a$, $A_3M + A_6M \geqslant 2a$. В то же время если M – центр шестиугольника, то $A_1M + A_2M + A_3M + A_4M + A_5M + A_6M = 6a$.

9. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *хорошая*, если для нее справедливо следующее утверждение: "какие бы ни были числа a и b и какое бы ни было число y, расположенное между $f(a)$ и $f(b)$, найдется число x между a и b, такое что $f(x) = y$". Найдите все хорошие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие что $f(f(x)) = -x^{2011}$ при всех x.

ОТВЕТ. Таких функций не существует.

РЕШЕНИЕ. Пусть f – искомая. Из условия $f(f(x)) = -x^{2011}$ следует, что f инъекция. Инъекция, принимающая все промежуточные значения, обязана быть строго монотонной. Композиция двух функций одинакового характера монотонности – возрастающая функция. $-x^{2011}$ – строго убывающая функция. Противоречие.

10. У Юли есть 12 карандашей разной длины. Она укладывает их в коробку в два слоя так, что в каждом слое карандаши упорядочены по возрастанию длины (если считать их слева направо) и каждый карандаш в верхнем слое короче того карандаша в нижнем слое, на котором он лежит. Сколькими способами Юля может уложить карандаши в коробку?

ОТВЕТ. 132 способа.

РЕШЕНИЕ. Представим себе общую ситуацию: в нижнем слое вплотную справа уже лежат k упорядоченных нужным образом карандашей, и требуется опрелить число способов доставить m карандашей в нижний и $m + k$ карандашей в верхний ряд так, чтобы условие на длины соблюдалось. Мы обозначим искомое число a_m^k и выразим его рекуррентно. Точнее говоря, справедливы формулы: $a_m^k = a_m^{k-1} + a_{m-1}^{k+1}$ если $m > 1$, $k > 0$; $a_m^0 = a_{m-1}^0 + a_{m-2}^2$; $a_1^k = a_1^k + 1$ (краевой эффект). Эти формулы позволяют динамически определить искомое число a_{12}^0:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$\dots$
$m=1$	1	2	3	4	5	6	...
$m=2$	2	5	9	14	20	...	
$m=3$	5	14	28	48	...		
$m=4$	14	42	90	...			
$m=5$	42	132	...				
$m=6$	132	...					
$\dots$	...						