Олимпиада МГУ
«Покори Воробьевы горы — 2011»

Решение заданий заочного тура олимпиады МГУ по математике, 11 класс

1. Какое время между 14:10 и 15:10 показывают часы в тот момент, когда угол между минутной и часовой стрелками равен $90°$?

   Ответ: 15:10, 14 **часов** $27\frac{3}{11}$ **минуты = 14** $\frac{5}{11}$ **часа**

   1) Если часы показывают 15:00, то, очевидно, угол между минутной и часовой стрелками равен $90°$.

   2) За n минут минутная стрелка проходит угол в $(6n)°$ градусов, а часовая — в $\left(\frac{n}{2}\right)°$ градусов. В 14:00 угол между минутной и часовыми стрелками равен $60°$ градусам и пусть через n минут после 14:00 угол стал $90°$. Тогда
$$6n - \left(\frac{n}{2} + 60°\right) = 90°,$$
   откуда $n = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$ минуты.

2. Решите неравенство $\sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x \geqslant 1$.

   Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

   Так как $|\sin(\alpha)| \leqslant 1$, то исходное неравенство может выполняться только если $|\sin x| = |\sin 1755x| = |\sin 2011x| = 1$.

   Рассмотрим случаи:

   1) $\sin x = 1$. Тогда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \sin(1755(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin(2011(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)) = -1 \Rightarrow \sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x = 1$.

   2) $\sin x = -1$. Тогда $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \sin(1755(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(2011(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n)) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \sin x \cdot \sin 1755x \cdot \sin 2011x = -1$.

3. Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

   Ответ: 56.

   Первое решение. Петя последовательно выписывает члены арифметической прогрессии $a_n = 21 - 4(n-1)$, а Вася — сумму этих членов $S_n = \frac{2\cdot 21 - 4(n-1)}{2} \cdot n = (21 - 2(n-1))n = 23n - 2n^2$. Уравнение $23x - 2x^2 = 55$ имеет следующие решения: $\frac{23\pm\sqrt{89}}{4}$. Так как $3 < \frac{23-\sqrt{89}}{4} < 4$ и $8 < \frac{23+\sqrt{89}}{4} < 9$, то достаточно сравнить $S_3 = 51$, $S_4 = 60$, $S_8 = 56$ и $S_9 = 45$. Ближайшим к 55 является сумма $S_8 = 56$.

   Второе решение. Пока Петя выписывает положительные числа, суммы выписанные Васей возрастают и несложно вычислить, что в возрастающей последовательности чисел, написанной Васей, ближайшим к 55 будет число 51. Но потом Петя начнёт выписывать отрицательные числа и суммы, подсчитанные Васей, начнут убывать. Среди убывающей последовательности сумм ближайшей к 55 будет число 56 (см. таблицу).

Петя	21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	...
Вася	21	38	51	60	65	66	63	56	45	...

4. Натуральные числа m, n таковы, что дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима, а дробь $\dfrac{4m+3n}{5m+2n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

   Ответ: 7

   Пусть числа $4m+3n$ и $5m+2n$ имеют общий делитель $d > 1$. Тогда существуют такие натуральные числа a и b, что справедлива система
$$\begin{cases} 4m + 3n = ad, \\ 5m + 2n = bd. \end{cases}$$

Выразим из этой системы m и n: $7n = d(5a-4b)$, $7m = d(3b-2a)$. Если 7 не делится на d, то тогда m и n делятся на $d > 1$, что противоречит несократимости дроби $\dfrac{m}{n}$. Следовательно, $d = 7$.

5. Решите уравнение $\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4$.

   Ответ: $x = 0$, $x = 2$, $x = 13$, $x = 15$.

   Сделаем замену: $a = \sqrt[3]{15x+1-x^2}$, $b = \sqrt[3]{x^2-15x+27}$. Уравнение равносильно системе

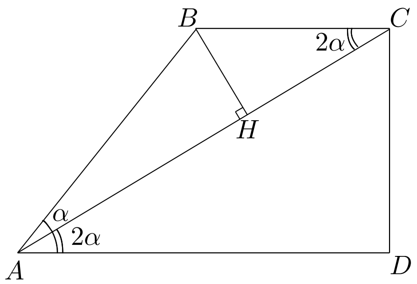
$$\begin{cases} a+b=4, \\ a^3+b^3=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ (a+b)^2-3ab=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4, \\ ab=3, \end{cases}$$

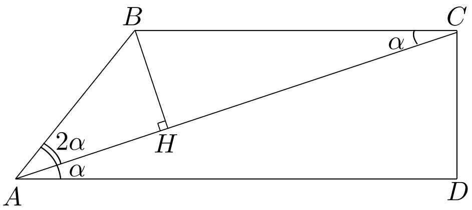
   что в свою очередь равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{15x+1-x^2}=1, \\ \sqrt[3]{x^2-15x+27}=3 \end{cases} \text{или} \begin{cases} \sqrt[3]{15x+1-x^2}=3, \\ \sqrt[3]{x^2-15x+27}=1. \end{cases}$$

   Решение первой системы сводится к решению уравнения: $x^2-15x=0 \Rightarrow x=0,\ x=15$. Решение второй системы сводится к решению уравнения $x^2-15x+26=0 \Rightarrow x=2,\ x=13$.

6. В прямоугольной трапеции бóльшая диагональ длины 11 делит острый угол трапеции в отношении 2 : 1, а расстояние от вершины тупого угла до этой диагонали равно 4. Какие значения может принимать площадь трапеции?





   Возможно существование двух различных трапеций, в которых диагональ AC делит угол BAD в отношении 2 : 1. В первом случае положим $\angle BAC = \alpha$ и $\angle CAD = 2\alpha$, а тогда $\angle BCA = 2\alpha$. Следовательно, $AC = AH + HC = 4(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}2\alpha)$. Во втором случае $\angle BAC = 2\alpha$ и $\angle CAD = \alpha . \angle BCA = \alpha$, тогда $\angle BCA = \alpha$ и также $AC = AH + HC = 4(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}2\alpha)$. Уравнение $4(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}2\alpha) = 11$ сводится к квадратному (относительно $\operatorname{ctg}\alpha$):

$$6(\operatorname{ctg}\alpha)^2 - 11\operatorname{ctg}\alpha - 2 = 0,$$

   которое имеет два решения: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 2$. Так как угол α острый, то $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, откуда $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.

   И в первом и во втором случае $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 11 = 22$.

   В первом случае $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD\cdot CD = \frac{1}{2}AC\cos 2\alpha \cdot AC\sin 2\alpha = \frac{121}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{25} = \frac{726}{25} = 29\frac{1}{25}$.

   $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 22 + 29\frac{1}{25} = 51\frac{1}{25}$.

   Во втором случае $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD\cdot CD = \frac{1}{2}AC\cos\alpha\cdot AC\sin\alpha = \frac{121}{4}\sin 2\alpha = \frac{121}{5} = 24\frac{1}{5}$

   $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 22 + 24\frac{1}{5} = 46\frac{1}{5}$.

7. Найдите наибольшее значение выражения

$$(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \ldots + (x_{2010}-x_{2011})^2 + (x_{2011}-x_1)^2$$

   при $x_1, \ldots, x_{2011} \in [0;1]$.

   Ответ: 2010.

   Проведём доказательство с помощью метода математической индукции для $2n+1$ чисел $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in [0;1]$. А именно, покажем, что наибольшее значение выражения

$$(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \ldots + (x_{2n}-x_{2n+1})^2 + (x_{2n+1}-x_1)^2$$

при $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in [0;1]$ равно $2n$.

Сначала заметим, что при $x_1, \ldots, x_{2n+1} \in [0;1]$ всегда справедливо неравенство

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{2n} - x_{2n+1})^2 + (x_{2n+1} - x_1)^2 \leqslant \\ \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1|$$

1) Проверим, что для любых чисел x, y, z, таких что $x, y, z \in [0;1]$ справедливо неравенство

$$|x - y| + |y - z| + |z - x| \leqslant 2,$$

причем существуют такие числа $x, y, z \in [0;1]$, что $|x - y| + |y - z| + |z - x| = 2$. Действительно, не ограничивая общности, будем считать, что $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$. Тогда

$$|x - y| + |y - z| + |z - x| = y - x + z - y + z - x = 2(z - x) \leqslant 2.$$

Равенство достигается, например, если $x = y = 0$, $z = 1$.

2) Предположим, что для $2n - 1$ одного числа наибольшее значение выражения

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n-2} - x_{2n-1}| + |x_{2n-1} - x_1|$$

равно $2n - 2$ при $x_1, \ldots, x_{2n-1} \in [0;1]$.

3) Рассмотрим выражение для $2n + 1$ числа:

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n-2} - x_{2n-1}| + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1| = \\ = \underbrace{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n-2} - x_{2n-1}| + |x_{2n-1} - x_1|}_{\leqslant 2n-2} - |x_{2n-1} - x_1| + |x_{2n-1} - x_{2n}| +$$

$$+ |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1| \leqslant 2n - 2 - |x_{2n-1} - x_1| + \underbrace{|x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_{2n-1}|}_{\leqslant 2} -$$

$$- |x_{2n+1} - x_{2n-1}| + |x_{2n+1} - x_1| = 2n + |x_{2n+1} - x_1| - |x_{2n-1} - x_1| - |x_{2n+1} - x_{2n-1}| \leqslant 2n,$$

так как $|x_{2n+1} - x_1| \leqslant |x_{2n-1} - x_1| + |x_{2n+1} - x_{2n-1}|$.

Значение $2n$ выражение

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{2n-2} - x_{2n-1}| + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1|$$

достигает, например, при $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n-1} = x_{2n+1} = 1$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2n} = 0$.

В частности

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{2n} - x_{2n+1})^2 + (x_{2n+1} - x_1)^2 = 2010$$

при $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2011} = x_{2n+1} = 1$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2010} = 0$.

8. Решите систему

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 + 3xy + 2xz - yz - 10y + 5 = 0, \\ 49x^2 + 65y^2 + 49z^2 - 14xy - 98xz + 14yz - 182x - 102y + 182z + 233 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\mathbf{(0, 1, -2)}$, $\mathbf{(\frac{2}{7}, 1, -\frac{12}{7})}$.

Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно разности $(x - z)$:

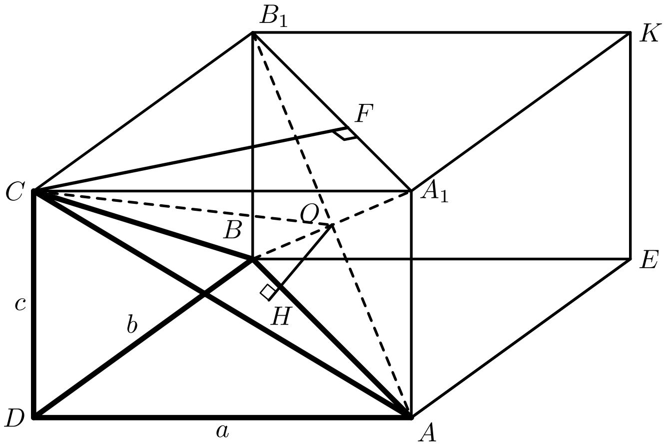
$$49(x - z)^2 - 14(x - z)(y + 13) + 65y^2 - 102y + 233 = 0.$$

$\frac{D}{4} = 49(y + 13)^2 - 49(65y^2 - 102y + 233) = -(56)^2(y - 1)^2 \leqslant 0.$

Следовательно, второе уравнение имеет решение только если $y = 1$. Тогда из второго уравнения получаем, что $x - z = 2$. Сделав замену в первом уравнении $z = x - 2$ и подставив $y = 1$, получим:

$$5x^2 + 3x + 2x(x - 2) - (x - 2) - 2 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 (z = -2),\ x = \frac{2}{7} (z = -\frac{12}{7}).$$

9. В тетраэдре все плоские углы при одной вершине — прямые. Некоторая точка пространства удалена от указанной вершины тетраэдра на расстояние 3, а от остальных его вершин — на расстояния $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите расстояния от центра описанной около тетраэдра сферы до каждой из его граней.



Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр и все плоские углы при вершине D прямые. Пусть длины отрезков DA, DB и DC равны a, b и c соответственно. Свяжем с лучами DA, DB и DC прямоугольную систему координат $Dxyz$. В этой системе координат точка D имеет координаты $(0,0,0)$, а точки A, B и C имеют координаты $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$ соответственно. Пусть координаты точки K, указанной в условии задачи, равны (x,y,z). Не ограничивая общности, будем считать, что $KA=\sqrt{5}$, $KB=\sqrt{6}$, $KC=\sqrt{7}$. Тогда

$$KD^2 = x^2+y^2+z^2 = 9, \tag{1}$$
$$KA^2 = (x-a)^2+y^2+z^2 = 5, \tag{2}$$
$$KB^2 = x^2+(y-b)^2+z^2 = 6, \tag{3}$$
$$KC^2 = x^2+y^2+(z-c)^2 = 7. \tag{4}$$

Сложим второе, третье и четвёртое уравнения и вычтем из полученной суммы удвоенное первое уравнение:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 0,$$

откуда следует, что $x=a$, $y=b$, $z=c$, т.е. точки A, B, C и K являются вершинами прямоугольного параллелепипеда, причём отрезок KD является его главной диагональю. Подставив найденные значения x, y и z в уравнения (1)–(4), найдём что $a^2=4$, $b^2=3$, $c^2=2$.

Центр O описанной около тетраэдра сферы лежит на середине отрезка KD. Расстояния от точки O до граней CDA, CDB и DBA равны $\frac{b}{2}$, $\frac{a}{2}$ и $\frac{c}{2}$ соответственно, т.е. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 и $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пусть OH — перпендикуляр, опущенный из точки O на грань ABC. Вычислим объём тетраэдра $OABC$ двумя способами:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot OH = \frac{1}{3}S_{OAB}\cdot CF.$$

Найдём площадь $\triangle ABC$. По теореме косинусов $\cos\angle ABC = \frac{BC^2+BA^2-AC^2}{2BC\cdot BA}$. Так как $BC = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{5}$, $BA = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{7}$, $AC = \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{6}$, то $\cos\angle ABC = \frac{5+7-6}{2\sqrt{5}\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{35}}$. Следовательно, $\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}}$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{7}\sqrt{5}\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника A_1B_1C найдём $CF = \frac{A_1C\cdot B_1C}{A_1B_1} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

$S_{AOB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot \dfrac{1}{2}AA_1 = \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$. Окончательно получаем

$$OH = \frac{CF \cdot S_{OAB}}{S_{ABC}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{14}}{4}\frac{2}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

10. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в 2 слоя по 6 карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче его?

    Ответ: 132

    Пусть $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant 6$. Обозначим через $K(m,n)$ множество всех укладок $m+n$ карандашей различной длины с условиями: 1) в нижнем ряду уложено n карандашей, начиная от правого края без пропусков по убыванию длины; 2) в верхнем ряду так же уложено m карандашей; 3) каждый карандаш верхнего ряда короче чем карандаш, лежащий непосредственно под ним. И пусть $k(m,n)$ обозначает число таких укладок. В каждой укладке из $K(m,n)$ самый короткий карандаш лежит либо самым левым в нижнем ряду (тогда $m<n$), либо самым левым в верхнем ряду. Убирая его, мы в первом случае получим правильную укладку из множества $K(m,n-1)$, а во втором случае получим правильную укладку из множества $K(m-1,n)$. Обратно, добавляя короткий карандаш в нижний слой к любой укладке из $K(m,n-1)$ или в верхний слой к любой укладке из $K(m-1,n)$ (только если $m-1<n$)получим правильную укладку из множества $K(m,n)$. Отсюда получаем, что $k(m,n) = k(m-1,n) + k(m,n-1)$, если $m<n$, и $k(m,n) = k(m-1,n)$, если $m=n$. При этом $k(0,n)=1$ при всех n.

    Рассмотрим клетчатую доску размером 7×7. Занумеруем строки снизу вверх числами $0,1,\ldots,6$, а столбцы слева направо числами $0,1,\ldots,6$. В клетку, лежащую в строке с номером m и в столбце с номером n, будем ставить число $k(m,n)$. Используя приведенное выше равенство, заполним таблицу, двигаясь из нижнего левого угла в верхний правый. Получим таблицу:

						132
					42	132
				14	42	90
			5	14	28	48
		2	5	9	14	20
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1

Получаем, что $k(6,6) = 132$.