

1. (3 балла) Петя и Вася выходят одновременно из пункта  $A$  и идут в пункт  $B$ , Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найти расстояние между  $A$  и  $B$  по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 5 км, скорость движения Васи 3 км/ч, а скорость Пети — натуральное число и он приходит в  $B$  на один час позже Васи.

2. (4 балла) Решите уравнение

$$\sqrt{25 \sin x + 24} + 2\sqrt{3} \cos x = 0.$$

3. (4 балла) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{16}} x \geq -2^{-x}.$$

4. (5 баллов) Решите уравнение  $f(\sqrt{x+4}) = f(2x)$ , где  $f(t) = 2t - t^2$  при всех действительных  $t$ .

5. (7 баллов) Через точки  $L, M, N$ , лежащие соответственно на рёбрах  $AB, AC, AD$  правильного тетраэдра  $ABCD$  проведена плоскость. Известно, что рёбра тетраэдра равны 1, объём пирамиды  $ALMN$  равен  $\frac{\sqrt{2}}{48}$  и  $AL = \frac{1}{3}$ . Какие значения может принимать длина отрезка  $MN$ ?

6. (7 баллов) Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать  $N$ , если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах  $x$  и  $y$ ?

1. (3 балла) Петя и Вася выходят одновременно из пункта  $A$  и идут в пункт  $B$ , Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найти расстояние между  $A$  и  $B$  по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 6 км, скорость движения Васи 4 км/ч, а скорость Пети — натуральное число и он приходит в  $B$  на один час позже Васи.

2. (4 балла) Решите уравнение

$$\sqrt{41 \cos x + 40} + 2\sqrt{5} \sin x = 0.$$

3. (4 балла) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} x \geq 16^x.$$

4. (5 баллов) Решите уравнение  $f(\sqrt{x+9}) = f(3x)$ , где  $f(t) = 3t - t^2$  при всех действительных  $t$ .

5. (7 баллов) Через точки  $L, M, N$ , лежащие соответственно на рёбрах  $AB, AC, AD$  правильного тетраэдра  $ABCD$  проведена плоскость. Известно, что рёбра тетраэдра равны 1, объём пирамиды  $ALMN$  равен  $\frac{\sqrt{2}}{36}$  и  $AL = \frac{2}{3}$ . Какие значения может принимать длина отрезка  $MN$ ?

6. (7 баллов) Какие из значений 6, 47, 2010 может принимать  $N$ , если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах  $x$  и  $y$ ?

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»  
Вариант 2–1

1. (3 балла) Ваня налил себе полный стакан смеси кофе с молоком. Сначала, выпив половину смеси, он долил в стакан доверху кофе и перемешал. Затем, выпив половину новой смеси, долил в стакан доверху молоко и вновь перемешал. Доля кофе в полученной смеси оказалась равной доле кофе в исходной. Найдите эту долю.

2. (4 балла) Решите неравенство

$$\log_{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \left(x - \frac{1}{x}\right) > \log_{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \left(x - \frac{1}{x}\right).$$

3. (4 балла) Один из корней квадратного уравнения  $px^2 + qx + 1 = 0$  ( $p < 0$ ) равен 2010. Решите неравенство

$$x + q\sqrt{x} + p > 0.$$

4. (5 баллов) Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ , так что  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ . На отрезках  $AB$  и  $BC$  по одну сторону от прямой  $AC$  построены квадраты. Окружности, описанные вокруг этих квадратов, пересекаются в точке  $D$ , отличной от  $B$ . Найдите площадь треугольника  $ACD$ .

5. (7 баллов) При каких значениях  $x$  число

$$\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{3-x}$$

является целым?

6. (7 баллов) Для каких из перечисленных значений параметра  $a$  ( $a = -1, 2010, \log_2 3$ ) найдётся такое значение  $b$ , что уравнение

$$\cos x + \cos ax = b$$

имеет единственное решение.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»  
Вариант 2–2

1. (3 балла) Ваня налил себе полный стакан смеси кофе с молоком. Сначала, выпив половину смеси, он долил в стакан доверху молоко и перемешал. Затем, выпив половину новой смеси, долил в стакан доверху кофе и вновь перемешал. Доля кофе в полученной смеси оказалась равной доле кофе в исходной. Найдите эту долю.

2. (4 балла) Решите неравенство

$$\log_{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \left(\frac{1}{x} - x\right) > \log_{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \left(\frac{1}{x} - x\right).$$

3. (4 балла) Один из корней квадратного уравнения  $px^2 + qx + 1 = 0$  ( $p < 0$ ) равен  $\frac{1}{2010}$ . Решите неравенство

$$x + q\sqrt{x} + p \geq 0.$$

4. (5 баллов) Точка  $B$  лежит на отрезке  $AC$ , так что  $AB = 5$ ,  $BC = 12$ . На отрезках  $AB$  и  $BC$  по одну сторону от прямой  $AC$  построены квадраты. Окружности, описанные вокруг этих квадратов, пересекаются в точке  $D$ , отличной от  $B$ . Найдите площадь треугольника  $ACD$ .

5. (7 баллов) При каких значениях  $x$  число

$$\sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{1-x}$$

является целым?

6. (7 баллов) Для каких из перечисленных значений параметра  $a$  ( $a = -1, 2010, \log_3 4$ ) найдётся такое значение  $b$ , что уравнение

$$\cos ax + \cos x = b$$

имеет единственное решение.

1. (3 балла) Бабушка читает незнакомую ей книгу из 970 страниц. Незнакомый текст она читает со скоростью 10 страниц в час, а прочитанный ранее — со скоростью 20 страниц в час. Пока книга не прочитана, бабушка читает её ежедневно по 5 часов с того места, где лежит закладка, и оставляет закладку там, где закончила чтение. В какой день недели бабушка прочтёт книгу до конца, если первые страницы она прочла в понедельник, а каждую ночь её внук переносит закладку на 20 страниц назад?
2. (4 балла) Найдите все  $x$  из отрезка  $[0, 2\pi]$ , для которых

$$\log_{\sin x} \cos x > \log_{\operatorname{ctg} x} \cos x.$$

3. (4 балла) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + x + xy^2 + y + 5 = 0, \\ x + y + xy + 5 = 0. \end{cases}$$

4. (5 баллов) Вокруг четырёхугольника  $ABCD$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Известно, что диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника перпендикулярны,  $AB = 4$ ,  $DC = 5$ . Какие значения может принимать площадь треугольника  $AOB$ ?
5. (7 баллов) Решите уравнение в целых числах

$$\sqrt{9x^2 + 160x - 800} = 3x - y.$$

6. (7 баллов) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{1-x}} + \left| \frac{1}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \right| + a \leq 0$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

1. (3 балла) Бабушка читает незнакомую ей книгу из 860 страниц. Незнакомый текст она читает со скоростью 15 страниц в час, а прочитанный ранее — со скоростью 30 страниц в час. Пока книга не прочитана, бабушка читает её ежедневно по 6 часов с того места, где лежит закладка, и оставляет закладку там, где закончила чтение. В какой день недели бабушка прочтёт книгу до конца, если первые страницы она прочла в понедельник, а каждую ночь её внук переносит закладку на 30 страниц назад?
2. (4 балла) Найдите все  $x$  из отрезка  $[0, 2\pi]$ , для которых

$$\log_{\cos x} \sin x > \log_{\operatorname{tg} x} \sin x.$$

3. (4 балла) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 - 2x - 2y, \\ x + y + 5 = -xy. \end{cases}$$

4. (5 баллов) Вокруг четырёхугольника  $ABCD$  описана окружность с центром в точке  $O$ . Известно, что диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника перпендикулярны,  $AB = 2$ ,  $DC = 6$ . Какие значения может принимать площадь треугольника  $DOC$ ?
5. (7 баллов) Решите уравнение в целых числах

$$\sqrt{9x^2 + 80x - 40} = 3x - 20y.$$

6. (7 баллов) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right| - a \leq 0$$

имеет единственное решение. Найдите это решение.

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»  
Вариант 4-1

1. (3 балла) После вырубki нескольких деревьев в парке оказалось, что число оставшихся деревьев равно числу процентов, на которое число деревьев в парке уменьшилось за время вырубki. Какое наименьшее число деревьев могло остаться в парке?

2. (3 балла) Решите уравнение

$$\sqrt{1 - |x - 2|} + \sqrt{4x - x^2} = 3 + |x - 2|.$$

3. (5 баллов) Высоты  $AK$  и  $CL$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Найдите величину  $\angle BAC$ , если  $AH = HK$  и  $CH = 2HL$ .

4. (5 баллов) Найдите минимальное натуральное число  $n$ , при котором система неравенств

$$\cos x \geq \cos \left(x + \frac{1}{8}\right) \geq \cos \left(x + \frac{2}{8}\right) \geq \dots \geq \cos \left(x + \frac{n}{8}\right)$$

не имеет решений.

5. (6 баллов) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$3 \cdot 4^x - 6a \cdot 2^x + 3a^2 + 2a - 14 < 0$$

не имеет решений.

6. (8 баллов) В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABCD$  длины всех рёбер равны 1. Некоторая плоскость пересекает отрезки  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно. Какие значения может принимать площадь треугольника  $SLN$ , если  $SK = \frac{1}{2}$  и  $SM = \frac{1}{3}$ ?

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы»  
Вариант 4-2

1. (3 балла) После посадки нескольких деревьев в парке оказалось, что число деревьев в этом парке равно числу процентов, на которое число деревьев увеличилось за время посадки. Какое наименьшее число деревьев могло оказаться в парке после посадки?

2. (3 балла) Решите уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 5} + \sqrt{9 - |x - 3|} = 5 + |x - 3|.$$

3. (5 баллов) Высоты  $AK$  и  $CL$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Найдите величину  $\angle BAC$ , если  $AH = 2HK$  и  $CH = HL$ .

4. (5 баллов) Найдите максимальное натуральное число  $n$ , при котором система неравенств

$$\sin x \leq \sin \left(x + \frac{1}{6}\right) \leq \sin \left(x + \frac{2}{6}\right) \leq \dots \leq \sin \left(x + \frac{n}{6}\right)$$

имеет решения.

5. (6 баллов) При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$9^x - 2a \cdot 3^x + a^2 + a - 5 < 0$$

не имеет решений.

6. (8 баллов) В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABCD$  длины всех рёбер равны 1. Некоторая плоскость пересекает отрезки  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно. Какие значения может принимать площадь треугольника  $SLN$ , если  $SK = \frac{1}{2}$  и  $SM = \frac{1}{4}$ ?

1. (3 балла) У Маши есть два разных стакана цилиндрической формы. Она заметила, что пакет муки можно так высыпать в эти стаканы, что уровень муки в первом стакане составит 12 см., а во втором — 10 см., или так, что уровень муки в первом стакане составит 9 см., а во втором — 12 см. На каком уровне окажется мука в каждом из этих стаканов, если муку из пакета высыпать в стаканы поровну?

2. (3 балла) Сколько различных решений на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  имеет уравнение

$$6\sqrt{2} \cos x \cdot \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{2} \operatorname{ctg} x + 3 \cos x - 1 = 0?$$

Найдите эти решения.

3. (4 баллов) Положительные числа  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа если  $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$ .

4. (5 баллов) Окружность с центром в точке  $O$ , лежащей на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  проходит через точку  $A$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ , а сторону  $BC$  в точках  $L$  и  $M$ . Известно, что  $KC = CL = MB = 2$ ,  $AK = 3$ . Найдите отношение длин отрезков  $AO$  и  $OB$ .

5. (7 баллов) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых для любого значения параметра  $b$ , неравенство

$$(a + b)x^2 + (3b - 4a + 7)x + 4a - 2b - 6 \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

6. (8 баллов) Через точки  $M, N, K, L$ , лежащие соответственно на ребрах  $SA, SB, SC, SD$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  ( $S$  — вершина), проведена плоскость. Известно что  $MK \perp NL$ ,  $SN = 3 \cdot SL$  и площадь треугольника  $SMK$  равна 12. Найдите площадь треугольника  $SLN$ .

1. (3 балла) У Маши есть два разных стакана цилиндрической формы. Она заметила, что пакет муки можно так высыпать в эти стаканы, что уровень муки в первом стакане составит 12 см. а во втором — 14 см., или так, что уровень муки в первом стакане составит 9 см., а во втором — 16 см. На каком уровне окажется мука в каждом из этих стаканов, если муку из пакета высыпать в стаканы поровну?

2. (3 балла) Сколько различных решений на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  имеет уравнение

$$10\sqrt{6} \cos x \cdot \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{6} \operatorname{ctg} x + 5 \cos x - 1 = 0?$$

Найдите эти решения.

3. (4 баллов) Положительные числа  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 2 от этих чисел равна 15. Найдите эти числа если  $\log_2 b_1 \cdot \log_2 b_5 = 8$ .

4. (5 баллов) Окружность с центром в точке  $O$ , лежащей на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  проходит через точку  $A$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ , а сторону  $BC$  в точках  $L$  и  $M$ . Известно, что  $KC = CL = MB = 3$ ,  $AK = 5$ . Найдите отношение длин отрезков  $AO$  и  $OB$ .

5. (7 балла) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых для любого значения параметра  $b$ , неравенство

$$(b - a)x^2 + (7 - 2a - 5b)x + 3 - a - 2b \geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

6. (8 баллов) Через точки  $M, N, K, L$ , лежащие соответственно на ребрах  $SA, SB, SC, SD$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  ( $S$  — вершина), проведена плоскость. Известно что  $MK \perp NL$ ,  $SN = 2 \cdot SL$  и площадь треугольника  $SMK$  равна 16. Найдите площадь треугольника  $SLN$ .